

Глава 4

Механика твердого тела

§ 14

Момент инерции

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции.

Моментом инерции системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n J_i .$$

Суммирование производится по всем элементарным массам m_i , на которые разбивается тело (рис. 21).

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm ,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z .

1. Момент инерции сплошного цилиндра или диска

Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним – $r + dr$ (рис. 22). Момент инерции каждого полого цилиндра $dJ = r^2 dm$ (т.к. $dr \ll r$, то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно r), где dm – масса всего элементарного цилиндра; его объем $2\pi r h dr$. Если ρ – плотный

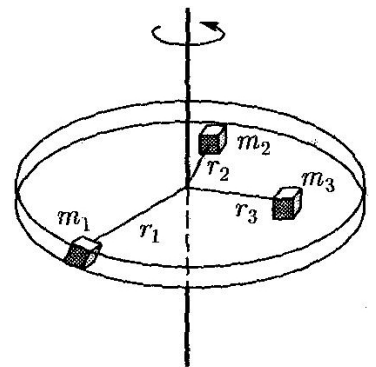


Рис. 21

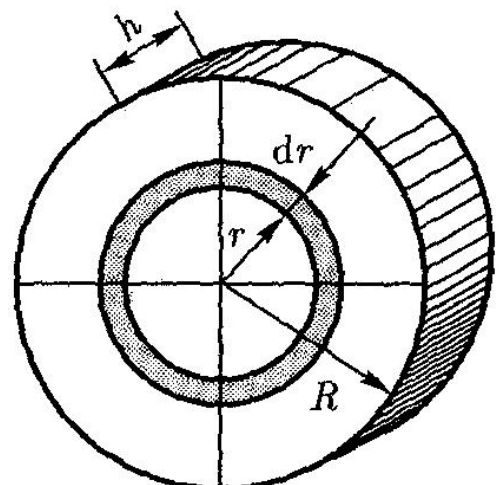


Рис. 22

материала, то $dm = \rho 2\pi r h dr$ и $dJ = 2\pi h \rho r^3 dr$. Тогда момент инерции сплошного цилиндра равен

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho,$$

но т.к. $\pi R^2 h$ – объем цилиндра, то масса $m = \pi R^2 h \rho$, а момент инерции

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется *теоремой Штейнера* (рис. 23).

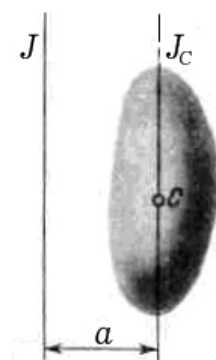


Рис.23

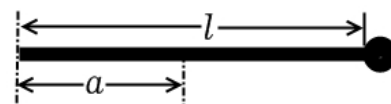
2. Теорема Штейнера: момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями

$$J = J_C + m a^2. \quad (14.1)$$

Задача. Твердое тело состоит из стержня массой m и длиной l , на конце которого прикреплена точечная масса m . Определить момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через противоположный конец стержня перпендикулярно к нему.

Решение. Момент инерции тела найдем как сумму моментов инерций стержня и точечной массы относительно указанной оси

$$J = J_{\text{ст}} + J_{\text{т}}.$$



Для нахождения момента инерции стержня относительно оси проходящей через его конец воспользуемся теоремой Штейнера

$$J_{\text{ст}} = J_C + m a^2,$$

где $J_C = \frac{1}{12} ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси проходящей через его центр масс, $a = l/2$ – расстояние между осями. Подставим эти величины в выражение для теоремы Штейнера и получим

$$J_{\text{ст}} = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Момент инерции точечной массы равен

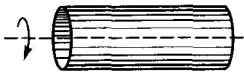
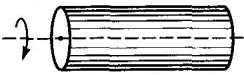
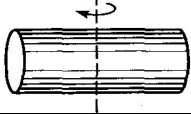
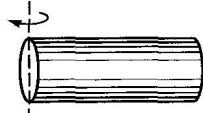
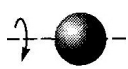
$$J_{\text{т}} = ml^2.$$

С учетом этого выражение для момента инерции тела будет иметь вид

$$J = \frac{1}{3} ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2.$$

Приведем значения моментов инерции (таблица 1) для некоторых тел (тела считаются однородными, m – масса тела).

Таблица 1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр (обруч) радиусом R	Ось симметрии 	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии 	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину 	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец 	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара 	$J = \frac{2}{5} mR^2$

Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело (рис. 24), вращающееся около неподвижной оси Z , проходящей через него. Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ находящиеся на расстоянии $r_1, r_2, \dots, r_n$ от оси вращения. При вращении тела относительно неподвижной оси отдельные его элементы объема массами m_i опишут окружности различных радиусов r_i и имеют различные линейные скорости v_i . Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова.

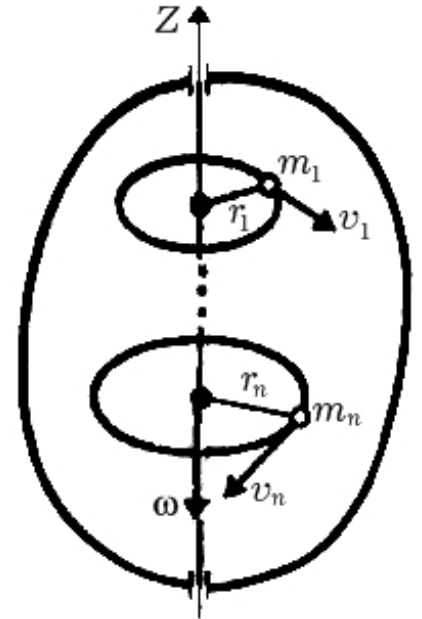


Рис. 24

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}. \quad (15.1)$$

Кинематическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинематических энергий его элементарных объемов

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

или

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Используя выражение (14.1), получим

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси Z . Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (15.2)$$

Из сравнения формулы (14.2) с выражением $T = mv^2/2$ следует, что момент инерции вращательного движения – **мера инертности тела**. Формула (15.2) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где m – масса катящегося тела; v_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Задача. Однородный тонкий тяжелый стержень длиной $l = 1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Стержень отклонили на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпустили. Найдите линейную скорость свободного конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

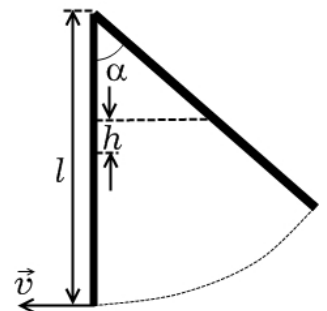
Решение. При движении стержня выполняется закон сохранения энергии. Потенциальная энергия стержня в начальном положении переходит в кинетическую энергию при прохождении им положения равновесия, т.е.

$$mgh = T,$$

где m – масса стержня, h – высота, на которую опускается центр масс стержня. Из рисунка видно, что ее можно рассчитать по формуле

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos \alpha).$$

Кинетическая энергия стержня при прохождении им положения равновесия может быть найдена по формуле



$$T = \frac{J\omega^2}{2},$$

где $\omega = v/l$ – угловая скорость стержня, J – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса. Он определяется по формуле

$$J = \frac{1}{3}ml^2.$$

Подставляем все величины в выражение закона сохранения энергии и получаем

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) = \frac{ml^2 v^2}{2 \cdot 3l^2}.$$

Из этого равенства выразим линейную скорость конца стержня

$$v = \sqrt{3gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$v = \sqrt{3 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot (1 - \cos 60^\circ)} = 3,8 \text{ м/с}.$$

§ 16

Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу $\vec{F}$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Модуль момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (16.1)$$

где α угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рис. 25);

$r \sin \alpha = l$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O – плечо силы.

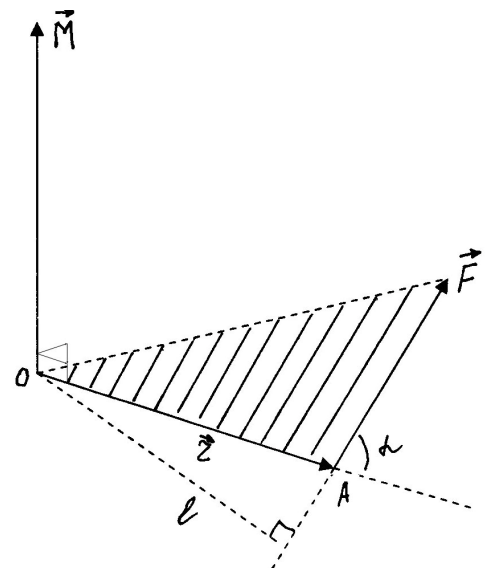


Рис. 25

Моментом силы относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина M_Z , равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси Z (рис. 26).

Если ось Z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент силы представляется в виде вектора совпадающего с осью

$$M_Z = [\vec{r} \times \vec{F}]_Z.$$

Найдем выражение для работы при вращении тела. Рассмотрим абсолютно твердое тело, когда работа силы $\vec{F}$ равна работе, затраченной на поворот всего тела (рис. 27). При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка B приложения силы $\vec{F}$ проходит путь

$ds = r d\varphi$, и работа равна произведению силы F_s на направление смещения на величину смещения

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi. \quad (16.2)$$

Учитывая (16.1), можно записать

$$dA = M_Z d\varphi,$$

где $F r \sin \alpha = F l = M_Z$ – момент силы относительно оси Z . Таким образом, **работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.**

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии

$$dA = dT,$$

но

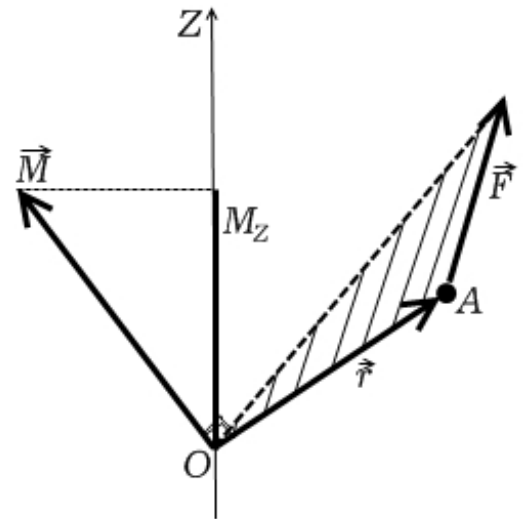


Рис. 26

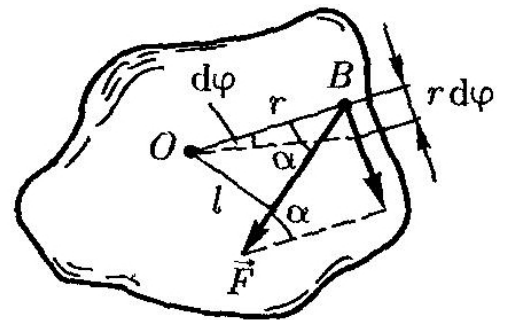


Рис. 27

$$dT = d\left(\frac{J_Z \omega^2}{2}\right) = J_Z \omega d\omega,$$

поэтому

$$M_Z d\varphi = J_Z \omega d\omega,$$

или

$$M_Z \frac{d\varphi}{dt} = J_Z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получим

$$M_Z = J_Z \frac{d\omega}{dt} = J_Z \varepsilon. \quad (16.3)$$

Уравнение (16.3) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси.

Можно показать, что если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}, \quad (16.4)$$

где J – главный момент инерции тела.

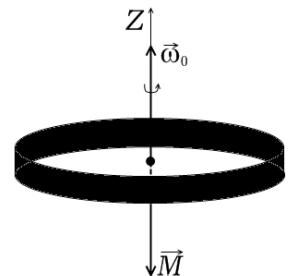
Задача. Маховик массой $m = 4$ кг вращается, делая $n = 720$ об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по ободу радиусом $R = 40$ см. Через $t = 30$ с под действием постоянного тормозящего момента силы маховик остановился. Найдите тормозящий момент силы.

Решение. Запишем уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$M_Z = J_Z \varepsilon,$$

где M_Z – проекция момента силы на ось вращения Z , J_Z – момент инерции маховика относительно этой оси, ε – угловое ускорение. Запишем выражения для момента инерции

$$J_Z = mR^2$$



и углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

где $\omega_0 = 2\pi n$ – начальная угловая скорость маховика, $\omega = 0$ – конечная скорость.

Подставляя полученные выражения в формулу для проекции момента силы, получаем

$$M_Z = -\frac{2\pi n m R^2}{t} = -\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 0,4^2}{30} \approx -1,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Как видно из рисунка и решения, вектор момента силы $\vec{M}$ направлен против оси Z , а его модуль равен

$$M = 1,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

§ 17

Момент импульса и закон его сохранения

Моментом импульса (количества движения) материальной точки A относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{v}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A ; $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс материальной точки (рис.

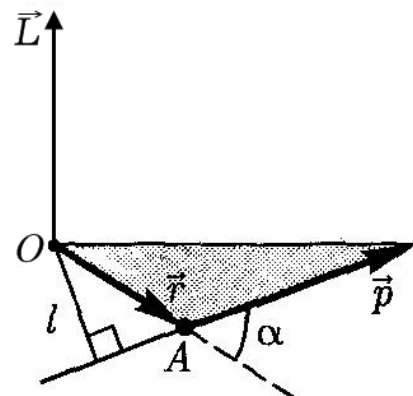


Рис. 28

28); $\vec{L}$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.

Модуль вектор момента импульса равен:

$$L = r p \sin \alpha = m v r \sin \alpha = p l,$$

где l – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O .

Моментом импульса относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина L_Z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси Z каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i , с некоторой скоростью $\vec{v}_i$. Скорость $\vec{v}_i$ и импульс $m_i\vec{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\vec{v}_i$. Поэтому можно записать, что момент импульса отдельной частицы

$$L_{iZ} = m_i v_i r_i \quad (17.1)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

Моментом импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц

$$L_Z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i .$$

Используя формулу (15.1) $v_i = \omega r_i$, получим

$$L_Z = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_Z \omega ,$$

т.е.

$$L_Z = J_Z \omega . \quad (17.2)$$

Продифференцируем уравнение (17.2) по времени

$$\frac{dL_Z}{dt} = J_Z \frac{d\omega}{dt} = J_Z \varepsilon = M_Z ,$$

т.е.

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z$$

Это выражение – еще одна форма **уравнения (закона) динамики вращательного движения твердого тела.**

Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (17.3)$$

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (17.4)$$

Выражение (17.4) представляет собой **закон сохранения импульса**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы. Он связан со свойством симметрии пространства, его изотропностью, т.е. инвариантностью физических законов относительно выбора направлений осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского (рис. 29).

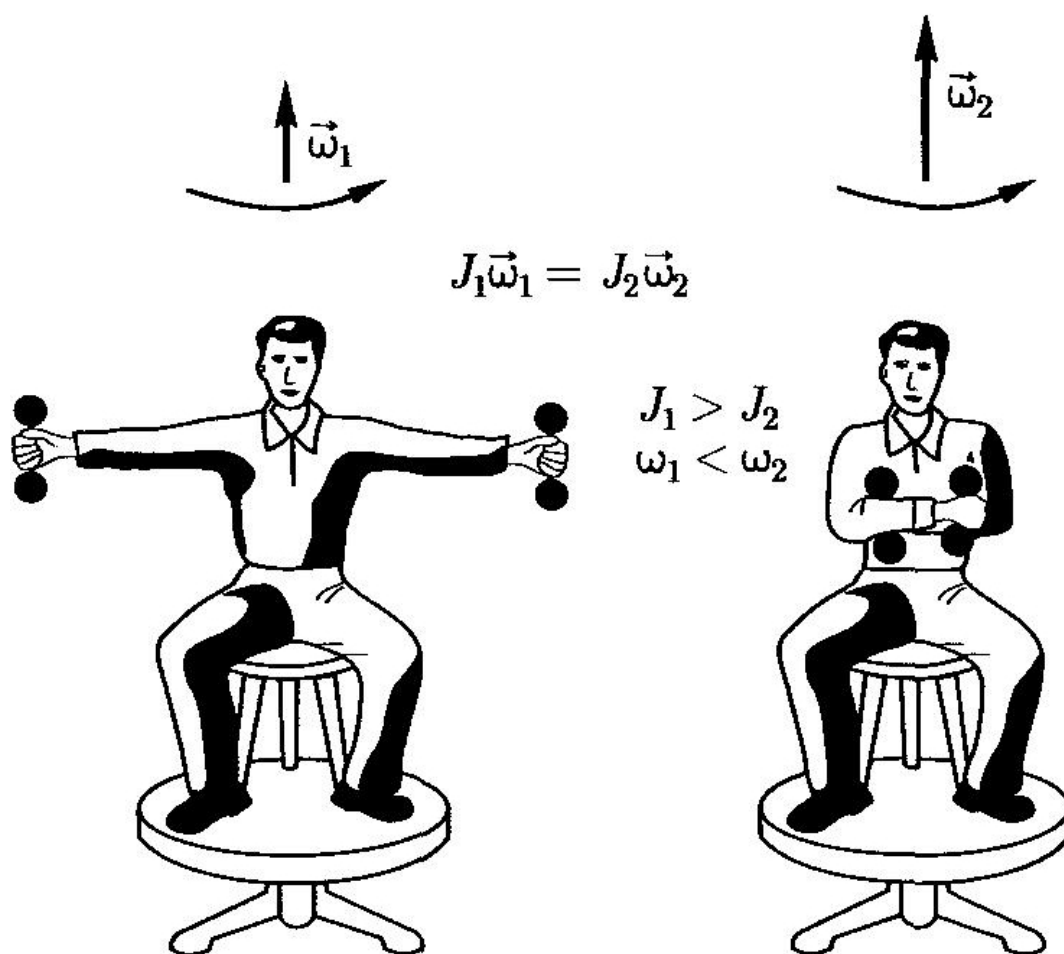


Рис. 29

Составим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 2).

Таблица 2

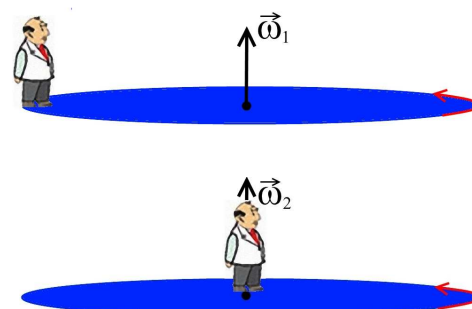
Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	M_Z или $\vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_Z = J_Z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_Z = J_Z\varepsilon$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа вращения	$dA = M_Z d\phi$
Кинетическая энергия	$T = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращения	$T = \frac{J_Z\omega^2}{2}$

Задача 1. Платформа в виде диска радиусом $R = 1\text{ м}$ вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 1\text{ с}^{-1}$. На краю платформы стоит человек массой $m = 60\text{ кг}$. Определите угловую скорость вращения платформы ω_2 , если человек перейдет к ее центру. Момент инерции платформы $J_{\text{пл}} = 120\text{ кг} \cdot \text{м}^2$, момент инерции человека рассчитать как для материальной точки.

Решение. По закону сохранения момента импульса можно записать

$$L_{\text{пл}} + L_{\text{ч}} = L'_{\text{пл}} + L'_{\text{ч}}.$$

$L_{\text{пл}} = J_{\text{пл}}\omega_1$ – момент импульса платформы в тот момент, когда человек стоял на краю;



$L_{\text{ч}} = J_{\text{ч}} \omega_1$ – момент импульса человек, когда он стоял на краю платформы;

$L'_{\text{пл}} = J_{\text{пл}} \omega_2$ – момент импульса платформы после того, как человек перешел в ее центр;

$L'_{\text{ч}} = J'_{\text{ч}} \omega_2$ – момент импульса человека после перехода в центр платформы.

Поскольку человека рассматриваем как материальную точку, то его момент инерции на краю платформы будет равен

$$J_{\text{ч}} = mR^2,$$

а после того, как он перейдет в центр, его момент инерции будет равен

$$J'_{\text{ч}} = 0.$$

С учетом всего записанного выше закон сохранения момента импульса системы можно записать в виде

$$J_{\text{пл}} \omega_1 + mR^2 \omega_1 = J_{\text{пл}} \omega_2,$$

откуда можно выразить конечную угловую скорость

$$\omega_2 = \frac{J_{\text{пл}} + mR^2}{J_{\text{пл}}} \omega_1.$$

Подставим числовые значения в полученное выражение

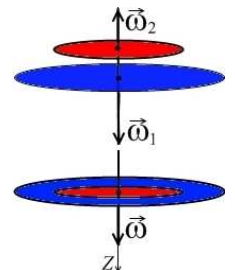
$$\omega_2 = \frac{120 + 60 \cdot 1^2}{120} \cdot 1 = 1,5 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 2. На общую вертикальную ось насажены два сплошных диска массами $m_1 = 2 \text{ кг}$ и $m_2 = 4 \text{ кг}$ и радиусами $r_1 = 0,5 \text{ м}$ и $r_2 = 0,3 \text{ м}$. Вращение дисков задается уравнениями $\varphi_1 = 2t$ (рад) и $\varphi_2 = -1,5t$ (рад). В некоторый момент верхний диск падает и сцепляется с нижним. Трение в осях пренебрежимо мало. Определите угловую скорость дисков и направление их вращения.

Решение. Воспользуемся законом сохранения момента импульса системы состоящей из двух дисков

$$L_{1z} + L_{2z} = L'_{1z} + L'_{2z}. \quad (1)$$

$L_{1z} = J_1 \omega_{1z}$ – проекция момент импульса I диска на ось Z до соединения;



$L_{2z} = J_2 \omega_{2z}$ – проекция момент импульса II диска на ось Z до соединения;
 $L'_{1z} = J_1 \omega_z$ – проекция момент импульса I диска на ось Z после соединения;
 $L'_{2z} = J_2 \omega_z$ – проекция момент импульса II диска на ось Z после соединения.

Моменты инерции дисков относительно оси Z равны соответственно

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \text{ и } J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2.$$

Подставим все в равенство (1) и получим

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega_{1z} + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_{2z} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega_z + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_z.$$

Выразим отсюда проекцию угловой скорости совместного вращения дисков

$$\omega_z = \frac{m_1 r_1^2 \omega_{1z} + m_2 r_2^2 \omega_{2z}}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}. \quad (2)$$

Проекции угловых скоростей дисков на ось Z до их соединения равна

$$\omega_{1z} = \frac{d\phi_1}{dt} = 2 \text{ рад/с и } \omega_{2z} = \frac{d\phi_2}{dt} = -1,5 \text{ рад/с.}$$

Подставим числовые значения в равенство (2)

$$\omega_z = \frac{2 \cdot 0,5^2 \cdot 2 + 4 \cdot 0,3^2 \cdot (-1,5)}{2 \cdot 0,5^2 + 4 \cdot 0,3^2} \approx 0,53 \text{ рад/с.}$$

§ 18

Свободные оси. Гироскоп

Оси вращения тел, которые не изменяют своей ориентации в пространстве без действия на них внешних сил, называются свободными осями (осями свободного вращения).

Три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями, называются главными осями инерции.

Например, у однородного параллелепипеда (рис. 30) главные оси инерции будут проходить через центры

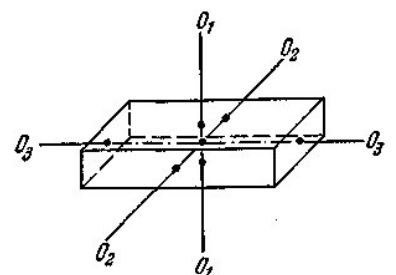


Рис. 30

противоположных граней. У тела, обладающего осевой симметрией (например, цилиндра), одной из главных осей инерции является ось симметрии, в качестве двух других осей могут служить две любые взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии и проходящей через центр инерции тела (рис. 31). У тела с центральной симметрией, т.е. у шара, плотность которого зависит только от расстояния от центра, главными осями инерции являются три любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр инерции.

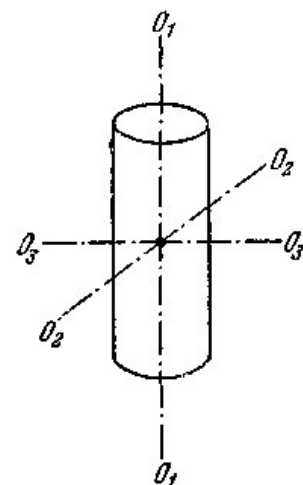


Рис. 31

Свойство свободных осей сохранять свое положение в пространстве широко применяется в технике. Наиболее интересны в этом плане **гироскопы** – массивные однородные тела, вращающиеся с большой угловой скоростью около своей оси симметрии, являющейся свободной осью.

Рассмотрим одну из разновидностей гироскопа – **гироскоп на кардановом подвесе** (рис. 32). Дискообразное тело – гироскоп – закреплено на оси AA , которая может вращаться вокруг перпендикулярной ей оси BB , которая, в свою очередь, может поворачиваться вокруг вертикальной оси DD . Все три оси пересекаются в одной точке C , являющейся центром масс гироскопа и остающейся неподвижной, а ось гироскопа может принять любое направление в пространстве. Силами трения в подшипниках всех трех осей и моментом импульса колец пренебрегаем.

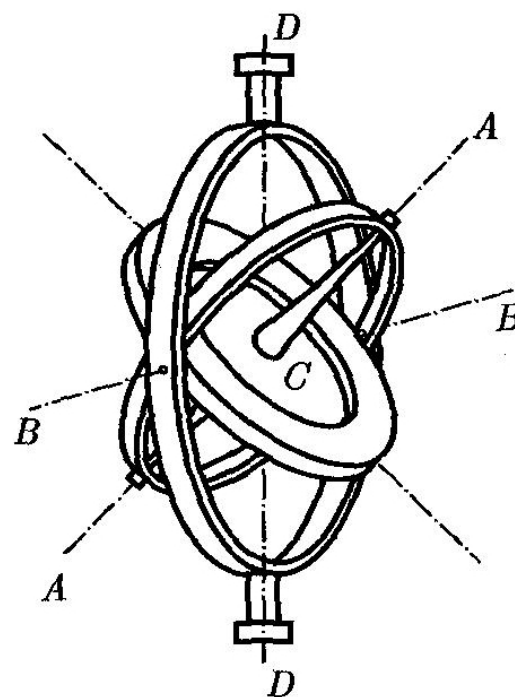


Рис. 32

Так как, трение в подшипниках мало, то, пока гироскоп неподвижен, его оси можно придать любое направление. Если начать гироскоп быстро вращать и поворачивать его подставку, то ось гироскопа сохраняет свое положение в про-

странстве неизменной. Это можно объяснить с помощью основного закона динамики вращательного движения.

Для свободно вращающегося гироскопа сила тяжести не может изменить ориентацию его оси вращения, т.к. сила приложена к центру масс, а момент силы тяжести относительно закрепленного центра масс равен нулю. Моментом сил трения мы тоже пренебрегаем. Поэтому если момент внешних сил относительно его закрепленного центра масс равен нулю, то, как следует уравнения (17.3), $\vec{L} = \text{const}$, т.е. момент импульса гироскопа сохраняет свою величину и направление в пространстве. Следовательно, вместе с ним сохраняет свое положение в пространстве и ось гироскопа.

Чтобы ось гироскопа изменила свое направление в пространстве, необходимо отличие от нуля момента внешних сил. Если момент внешних сил отличен от нуля, то наблюдается явление, получившее название **гироскопического эффекта**. Оно состоит в том, что под действием пары сил $\vec{F}$, приложенной к оси вращающегося гироскопа, ось гироскопа O_1O_1 (рис. 33) поворачивается вокруг прямой O_3O_3 , а не вокруг прямой O_2O_2 , как это казалось бы естественным на первый взгляд.

Гироскопический эффект объясняется следующим образом. Момент $\vec{M}$ пары сил $\vec{F}$ направлен вдоль прямой O_2O_2 . За время dt момент импульса $\vec{L}$ гироскопа получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$ и станет равным $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$. Направление вектора $\vec{L}'$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой O_3O_3 . Если время дей-

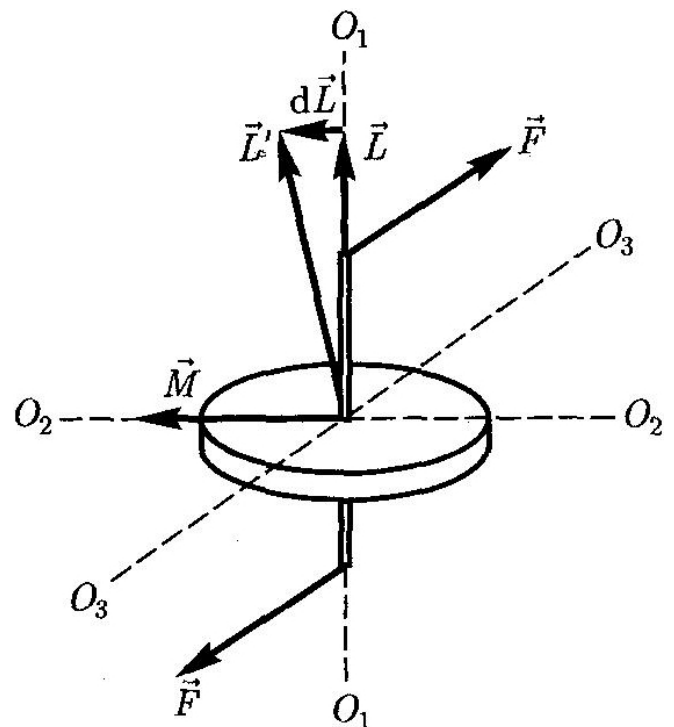


Рис. 33

ствия силы мало, то, хотя момент силы $\vec{M}$ и велик, изменение момента импульса

$d\vec{L}$ гироскопа будет также весьма малым. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для изменения следует прикладывать силы в течение длительного времени.

Если ось гироскопа закреплена подшипниками, то вследствие гироскопического эффекта возникают так называемые **гироскопические силы**, действующие на опоры, в которых вращается ось гироскопа. Их действие необходимо учитывать при конструировании устройств, содержащих быстро вращающиеся массивные части. Гироскопические силы имеют смысл только во вращающейся системе отсчета и являются частным случаем кориолисовой силы инерции, о которой будет сказано ниже.

Гироскопы применяются в различных гироскопических навигационных приборах (гироскомпас, гирогоризонт). Другое важное применение гироскопов – поддержание заданного направления движения транспортных средств, например судна (авторулевой) и самолета (автопилот). При всяком отклонении от курса в результате каких-то воздействий положение оси гироскопа в пространстве сохраняется. Следовательно, ось гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося устройства. Поворот рам карданова подвеса с помощью определенных приспособлений включает рули управления, которые возвращают движение к заданному курсу.

§ 19

Деформация твердого тела

Рассматривая механику твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого тела. Однако в природе абсолютно твердых тел нет, т.к. все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются.

Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальную форму и размеры.

Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются пластическими (остаточными).

Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь и рассматривать упругие деформации. Все виды деформации (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

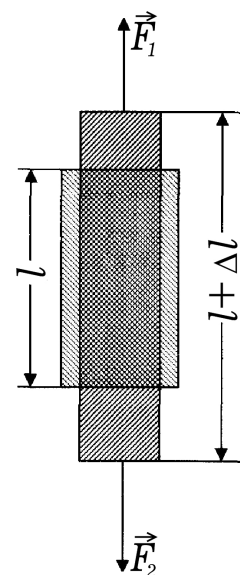


Рис. 34

Рассмотрим однородный стержень длиной l и площадью поперечного сечения S , (рис. 34) к концам которого приложены направленные вдоль его оси силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$) в результате чего длина стержня меняется на величину Δl . Естественно, что при растяжении Δl положительно, а при сжатии – отрицательно.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется напряжением

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (19.1)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным, если же по касательной к поверхности – тангенциальным.

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, испытываемой телом, является его **относительная деформация**. Так, относительное изменение длины стержня (продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (19.2)$$

относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где d – диаметр стержня.

Деформация ϵ и ϵ' всегда имеют разные знаки (при растяжении Δl положительно, а Δd отрицательно). Из опыта вытекает взаимосвязь ϵ и ϵ' :

$$\epsilon' = -\mu\epsilon,$$

где μ – положительный коэффициент, зависящий от свойств материала, называемый **коэффициентом Пуассона**.

Закон Гука: для малых деформаций относительное удлинение ϵ и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = \epsilon E, \quad (19.3)$$

где коэффициент пропорциональности E называется **модулем Юнга**. Из выражения (19.3) видно, что модуль Юнга определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

Из формулы (19.2), (19.3) и (19.1) вытекает, что

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES},$$

или

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l, \quad (19.4)$$

где k – **коэффициент упругости**. Выражение (19.4) также задает закон Гука.

Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, которую мы качественно рассмотрим для металлического образца.

Из рисунка 35 видно, что линейная зависимость $\sigma(\epsilon)$, установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до так называемого **предела пропорциональности** (σ_n). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость $\sigma(\epsilon)$ уже нелинейна) и до **предела упругости** (σ_y) остаточные

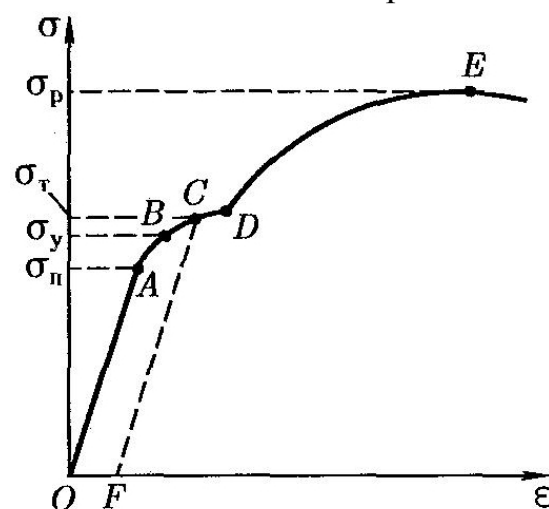


Рис. 35

деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изображается не на кривой BO , а параллельно ей – CF . напряжение, при котором появляется остаточная деформация ($\approx 0,2\%$), называется **пределом текучести** (σ_T) – точка C на кривой.

В области CD деформация возрастает без увеличения напряжения, т.е. тело как бы «течет». Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**). Материалы, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**, для которых же она практически отсутствует – **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за точку D) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** (σ_p).

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах является текучим.

Вычислим потенциальную энергию упруго растянутого (сжатого) стержня, которая равна работе, совершаемой внешними силами при деформации:

$$U = A = \int_0^{\Delta l} F dx,$$

где x – абсолютное удлинение стержня, изменяющееся в процессе деформации от 0 до Δl . Согласно (19.4)

$$U = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2$$

Относительная деформация сдвига определяется формулой (рис. 36)

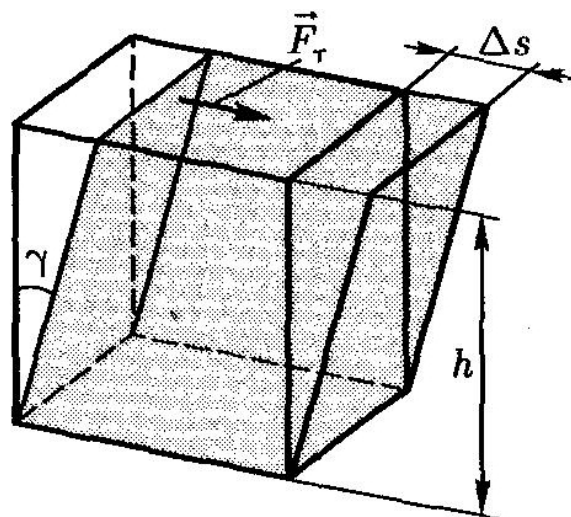


Рис. 36

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta S}{h}.$$

$\operatorname{tg}\gamma = \gamma$ — для малых углов.