Раздел I

Физические основы механики

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Развитие механики как науки начинается с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый Архимед (287–212 гг. до н.э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564–1642) и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643–1727).

Механика Галилея-Ньютона называется классической механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света с, изучаются релятивистской механикой, основанной на специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном (1879–1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприемлемы – они заменяются законами квантовой механики.

В первой части нашего курса мы будем иметь дело с механикой Галилея-Ньютона, т.е. будем рассматривать движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости с. В классической механике общепринята концепция пространства и времени, разработанная И. Ньютоном, и господствовавшая в естествознании на протяжении XVII-XVIII вв. Механика Галилея-Ньютона рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел, что соответствовало уровню знаний того времени.

Механика делится на три раздела:

1) кинематика;
2) динамика;
3) статика.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Поэтому законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

Глава 1

Элементы кинематики

§ 1

Модели в механике. Система отсчета.

Траектория, длина пути, вектор перемещения

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные **физические модели**. Простейшей моделью является **материальная точка** – тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению **системы материальных точек**.

Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положения.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета**.

Система отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета.

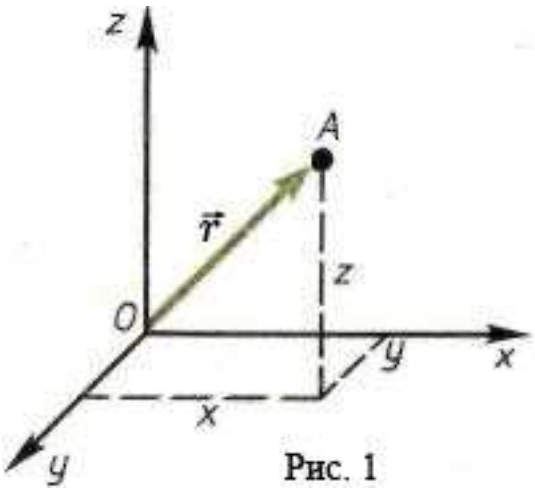


Рис. 1

В общем случае движение материальной точки А (рис. 1) определяется скалярными уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.1) (соответственно (1.2)) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки**.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **числом степеней свободы**.

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве.

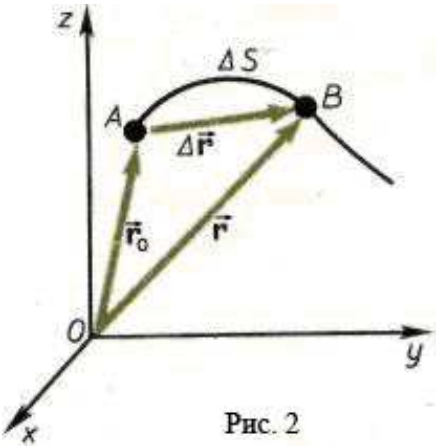


Рис. 2

Длина участка траектории АВ, пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется **длиной пути** Δs и является скалярной функцией времени: $\Delta s = \Delta s(t)$ (рис. 2)

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального

положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени, называется **перемещением**.

При прямолинейном движении

$$|\Delta\vec{r}| = \Delta s.$$

§ 2

Скорость

Скорость – векторная величина, которой определяется как быстрота движения, так и его направление в данный момент времени.

Вектором средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ называется отношение перемещения $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt (рис. 3):

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad (2.1)$$

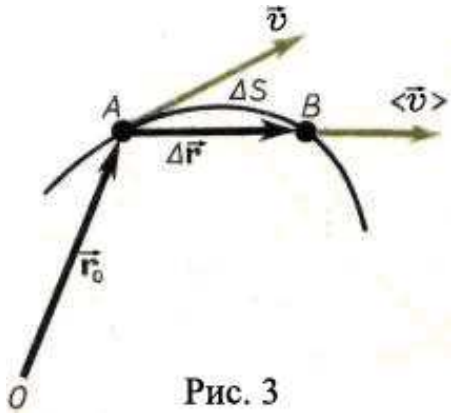


Рис. 3

Мгновенная скорость $\vec{v}$ – это векторная величина, равная первой производной радиуса вектора движущейся точки по времени (рис. 3)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$v = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad (2.2)$$

Средняя скорость неравномерного движения равна:

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Найдем **длину пути**, пройденного точкой за время Δt:

$$s = \int_{t}^{t+\Delta t} v dt. \qquad (2.3)$$

В случае **равномерного движения** численное значение мгновенной скорости постоянно, тогда выражение (2.3) примет вид

$$s = v\int_{t}^{t+\Delta t} dt = v\Delta t\,.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, дается интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt\,.$$

§ 3

Ускорение и его составляющие

Физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорением**.

Средним ускорением неравномерного движения на интервале от t до $t+\Delta t$, называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,.$$

Мгновенное ускорение $\vec{a}$ есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{a}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

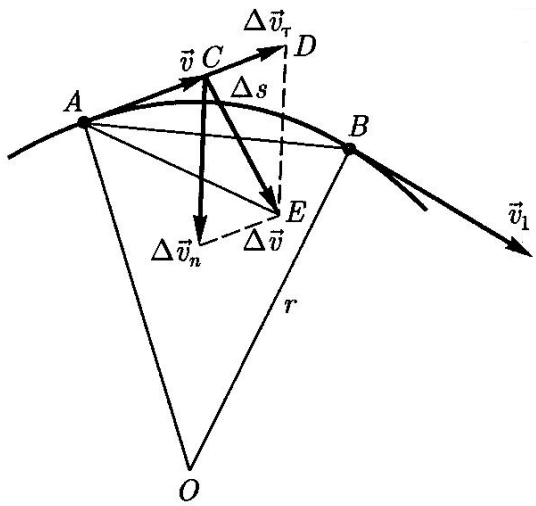


Рис. 4

Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две составляющие (рис. 4)

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n\,,$$

где $\Delta\vec{v}_\tau$ – определяет изменение скорости по ***модулю*** за время Δt; $\Delta\vec{v}_n$ – характеризует изменение скорости за время Δt по ***направлению***.

Тангенциальная составляющая уравнения направлена по касательной к траектории движения частицы и равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальной составляющей ускорения направление по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют так же **центростремительным ускорением**) и определяется выражением

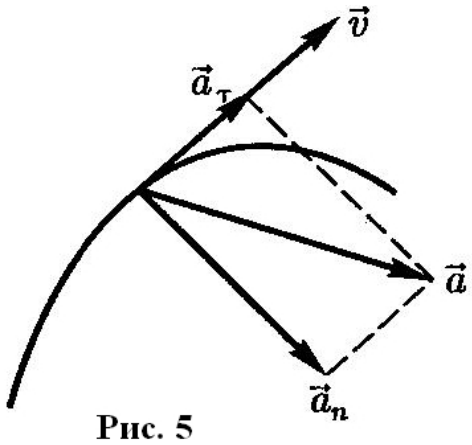


Рис. 5

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рис.5):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение;

2) $a_\tau = a = const$, $a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение;

3) $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением;

4) $a_\tau = 0$, $a_n = const$ – равномерное движение по окружности;

5) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение;

6) $a_\tau = const$, $a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение;

7) $a_\tau = f(t)$, $a_n \neq 0$ – криволинейное движение с переменным ускорением.

Задача 1. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с, $B = -0{,}5$ м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Решение. Средняя путевая скорость точки определяется выражением

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ – интервал времени, в течение которого точка проходит путь ΔS. Для определения пройденного пути ΔS воспользуемся уравнением движения $x = 2t - 0{,}5t^2$, из которого видно, что в некоторый момент времени точка меняет направление своего движения. Для нахождения этого момента времени найдем выражение для проекции скорости v_x

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 - t.$$

В момент изменения направления движения проекция скорости $v_x = 0$. Отсюда следует, что точка меняет направление движения в момент времени $t = 2$ с.

Теперь определим координаты точки в моменты времени t, t_1 и t_2:

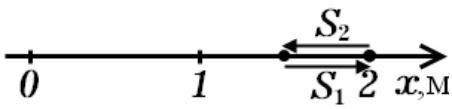
$x(t_1) = 2 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 1^2 = 1{,}5$ м, $x(t) = 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^2 = 2$ м, $x(t_2) = 2 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 3^2 = 1{,}5$ м.

Видим, что от момента времени t_1 до момента разворота t точка проходит путь

$$S_1 = |x(t) - x(t_1)| = 0{,}5 \text{ м},$$

от момента разворота t до момента времени t_2 путь, равный

$$S_2 = |x(t_2) - x(t)| = 0{,}5 \text{ м}.$$



Тогда средняя путевая скорость равна

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{t_2 - t_1} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j}$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2, $C = 10$ м/с. Найдите выражения для векторов мгновенной скорости от времени $\vec{v}(t)$ и полного ускорения $\vec{a}(t)$. Для момента времени $t = 1$ с вычислить: 1) модуль скорости v; 2) модуль ускорения a; 3) модуль тангенциального ускорения a_τ; 3) модуль нормального ускорения a_n; 4) радиус кривизны траектории R.

Решение. Определим, как зависит вектора мгновенной скорости от времени

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=2Bt\vec{i}+C\vec{j}=-10t\vec{i}+10\vec{j}$$

и вектор полного ускорения от времени

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=2B\vec{i}=-10\vec{i}\,.$$

Видим, что вектор полного ускорения не зависит от времени и направлен против оси *X*.

Модуль мгновенной скорости найдем по формуле

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,,$$

где $v_x=2Bt$ и $v_y=C$. Тогда зависимость модуля мгновенной скорости от времени будет иметь вид $v=\sqrt{4B^2t^2+C^2}$.

Подставим числовые значения и найдем модуль скорости

$$v=\sqrt{4\cdot(-5)^2\cdot1^2+10^2}\approx14\text{ м/с}.$$

Модуль полного ускорения равен

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{4B^2+0^2}=\sqrt{4\cdot(-5)^2}=10\text{ м/с}^2.$$

Величина тангенциального ускорения определяется выражением

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d(\sqrt{4B^2t^2+C^2})}{dt}=\frac{4B^2t}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}}\,.$$

Подставив числовые значения получаем

$$a_\tau=\frac{4\cdot(-5)^2\cdot1}{\sqrt{4\cdot(-5)^2\cdot1^2+10^2}}\approx7\text{ м/с}^2.$$

Величину нормального ускорения найдем из выражения $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{10^2-7^2}\approx7\text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории определим из формулы $a_n=v^2/R$

$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{14^2}{7}=28\text{ м}.$$

Задача 3. После выключения двигателя моторной лодки скорость лодки изменяется по закону $v = v_0/(1+\gamma t)$, где v_0, γ – постоянные. Найдите закон изменения со временем ускорения лодки. Какое расстояние пройдет лодка за время $t = n/\gamma$?

Решение. Ускорение моторной лодки при выключенном двигателе найдем следующим образом

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{1+\gamma t}\right) = \frac{-\gamma v_0}{(1+\gamma t)^2}.$$

Из равенства видно, что ускорение лодки направлено в противоположную сторону по отношению к направлению скорости, т.е. движение будет замедленным.

Расстояние, пройденное лодкой, найдем, если проинтегрируем скорость по времени

$$S = \int_0^{n/\gamma} v(t)dt = \int_0^{n/\gamma} \frac{v_0 dt}{1+\gamma t} = \frac{v_0}{\gamma}\ln(n+1).$$

Задача 4. Начальное значение скорости равно $\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ (м/с), конечное $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ (м/с). Найдите величину изменения вектора скорости Δv.

Решение. Вектор изменения скорости тела определяется выражением

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

А величину этого вектора можно определить по формуле

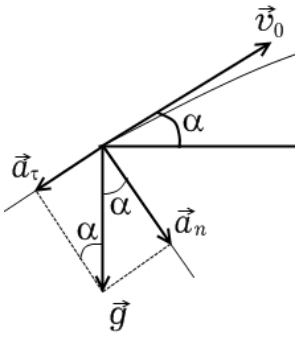
$$\Delta v = \sqrt{(v_{2x} - v_{1x})^2 + (v_{2y} - v_{1y})^2 + (v_{2z} - v_{1z})^2}.$$

Подставим в найденную формулу числовые значения

$$\Delta v = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2 + (6-5)^2} = 1{,}73\,\text{м/с}.$$

Задача 5. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения в начальный момент времени, а также радиус кривизны R траектории в этот же момент.

Решение. Полное ускорение, которое действует на тело равно ускорению свободного падения $\vec{a} = \vec{g}$. Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ находим как проекцию полного ускорения на касательную к траектории в начальный момент времени. Нормальную составляющую ускорения $\vec{a}_n$ находим как проекцию полного ускорения на нормаль к касательной в указанный момент времени.



Как видно из рисунка, тангенциальное ускорение направлено в сторону противоположную направлению скорости и его величина равна

$$a_\tau = g\sin\alpha = 9{,}8 \cdot \sin 30° = 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение направлено к центру кривизны траектории в данной точке и его величина равна

$$a_n = g\cos\alpha = 9{,}8 \cdot \cos 30° \approx 8{,}5 \text{ м/с}^2.$$

С другой стороны для нормального ускорения можно записать $a_n = \dfrac{v_0^2}{R}$, откуда радиус кривизны траектории в начальный момент времени равен

$$R = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{20^2}{8{,}5} \approx 47 \text{ м}.$$

§ 4

Угловая скорость и угловое ускорение

Модуль **вектора элементарного угла поворота** $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта** (рис. 6).

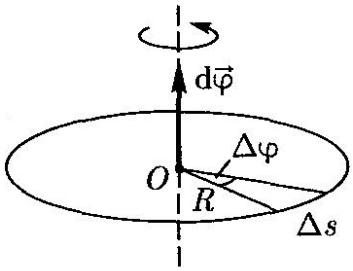


Рис. 6

Векторы, направления которых связываются с направлениями вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами**. Эти векторы не

имеют определенной точки приложения: они могут откладываться от любой точки оси вращения.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

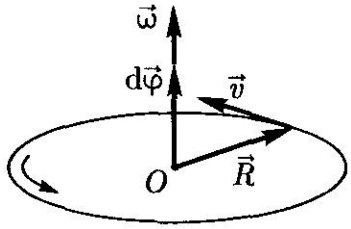


Рис. 7

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. так же как и вектор $d\vec{\varphi}$ (рис. 7). Единица измерения угловой скорости:

$$[\omega] = \text{рад/с}.$$

Линейная скорость точки (рис. 6)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т.е. $v = R\omega$.

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}].$$

Если $\omega = const$, то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения** T – временем, за которое точка совершит один полный оборот

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется **частотой вращения**:

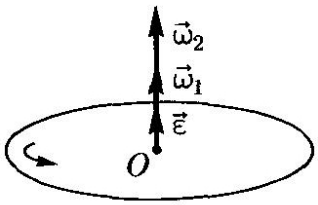
$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

$$\omega = 2\pi n.$$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

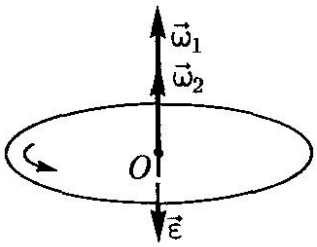
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 8), при замедленном – противонаправлен ему (рис. 9).



$\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$

Рис. 8



$\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$

Рис. 9

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon .$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R .$$

Связь между линейными и угловыми величинами выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi,\ v = R\omega,\ a_\tau = R\varepsilon,\ a_n = \omega^2 R .$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности $(\varepsilon = const)$

$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$, $\varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$, где ω_0 – начальная угловая скорость.

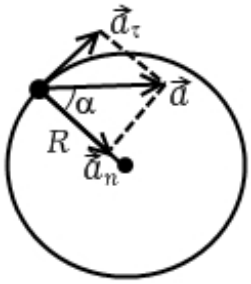
Задача 1. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 0{,}1$ м с постоянным по величине угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ с$^{-2}$. Определите: а) полное линейное ускорение a точки через 2 с после начала вращения; б) ее нормальное ускорение a_n через один оборот; в) угол между вектором полного ускорения и радиусом окружности в указанные моменты времени.

Решение. Полное ускорение точки определяется выражением

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \varepsilon R$ – тангенциальное ускорение, $a_n = \omega^2 R$ – нормальное ускорение точки. В формуле для нормального ускорения заменим угловую скорость выражени-

ем $\omega = \varepsilon t$, в результате получим $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$. Тогда выражение для полного ускорения будет иметь вид



$$a = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \varepsilon^4 t^4 R^2} = \varepsilon R \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}\ .$$

Подставив числовые значения, получим

$$a = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{1 + 0{,}5^2 \cdot 2^4} = 0{,}11\,\text{м/с}^2.$$

Угол, на который поворачивается материальная точка при вращении по окружности с постоянной угловой скоростью можно определить по формуле

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}.$$

Отсюда выразим квадрат угловой скорости $\omega^2 = 2\varepsilon\varphi$ и подставим в формулу для нормального ускорения.

$$a_n = 2\varepsilon\varphi R$$

При повороте точки на один оборот угол равен $\varphi = 2\pi$. Подставим числовые значения и вычислим нормальное ускорение

$$a_n = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 = 0{,}63\,\text{м/с}^2.$$

Как видно из рисунка, угол между вектором полного ускорения и радиусом окружности через один оборот можно определить по формуле

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{2\varepsilon\varphi R} = \frac{1}{2\varphi} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3{,}14} = 0{,}08 \text{ или } \alpha \approx 4{,}5^\circ$$

Задача 2. Закон вращения диска радиусом $R = 0{,}1\,\text{м}$ вокруг неподвижной оси имеет вид $\varphi = 10 + 5t^2 - 2t^4$. Найдите величину и направление ускорения точки, находящейся на ободе диска, спустя $t = 1\,\text{с}$ после начала движения.

Решение. Проекцию вектора угловой скорости диска на ось вращения Z определим по формуле

$$\omega_Z = \frac{d\varphi}{dt} = 10t - 8t^3$$

или для момента времени $t = 1\,\text{с}$ получим

$$\omega_Z = 10 \cdot 1 - 8 \cdot 1^3 = 2 \text{ рад/с},$$

т.е. угловая скорость направлена вдоль оси Z и равна по величине $\omega = 2$ рад/с.

Нормальное ускорение точки на ободе диска определим по формуле

$a_n = \omega^2 R$ или $a_n = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$ м/с^2.

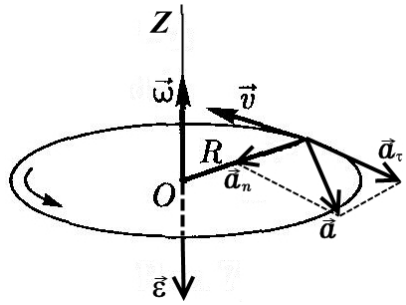
Проекция углового ускорения диска на ось Z определяется выражением

$$\varepsilon_Z = \frac{d\omega_Z}{dt} = 10 - 24t^2.$$

Подставим числовые значения

$$\varepsilon_Z = 10 - 24 \cdot 1^2 = -14 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение направлено против оси Z и равно по величине $\varepsilon = 14$ рад/с^2.



Тангенциальное ускорение определим из выражения

$$a_\tau = \varepsilon_Z R,$$

подставив числовые значения

$$a_\tau = (-14) \cdot 0{,}1 = -1{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус говорит о том, что тангенциальная составляющая ускорения точки a_τ направлена против вектора скорости $\vec{v}$.

Тогда, как это видно из рисунка, полное ускорение равно

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ или после подстановки числовых значений получим

$$a = \sqrt{(-1{,}4)^2 + 0{,}4^2} = 1{,}46 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3. Угловая скорость вращающегося тела изменяется по закону $\omega = 2t + 3t^2$ (рад/с). На какой угол повернулось тело за время от $t_1 = 1$с до $t_2 = 3$с?

Решение. Для определения угла, на который повернется тело за указанный промежуток времени, воспользуемся формулой

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega dt = \int_1^3 (2t + 3t^2) dt = (t^2 + t^3)\Big|_1^3 = 34 \text{ рад}.$$