

Глава 5

Тяготение. Элементы теории поля

§ 20

Закон Кеплера. Закон всемирного тяготения

Законы Кеплера

I закон: Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II закон: Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади

$$\frac{S_1}{t_1} = \frac{S_2}{t_2}.$$

III закон: Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Закон всемирного тяготения: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

§ 21

Сила тяжести и вес. Невесомость

$\vec{F}_m = m\vec{g}$ – сила тяжести. По закону всемирного тяготения

$$F_m = mg = F = G \frac{mM}{R^2},$$

где M – масса Земли, R – ее радиус.

Если тело расположено на высоте h над Землей, то сила тяжести будет равна

$$F_m = G \frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Весом тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения.

Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называют состоянием **невесомости**.

§ 22

Поле тяготения и его напряженность

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **поля тяготения**, или **гравитационного поля**.

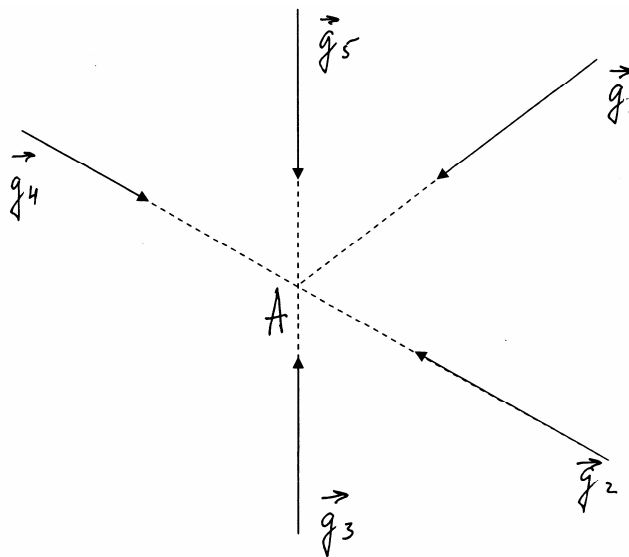
Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой m , внесенное в это поле, действует сила тяготения

$$\vec{F}_m = m\vec{g}, \quad (22.1)$$

где $\vec{g}$ – напряженность поля тяготения.

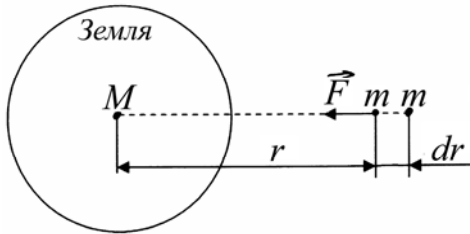
Поле тяготения называется однородным, если его напряженность во всех точках одинакова.

Поле тяготения называется центральным, если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке (A), неподвижной по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета.



§ 23

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения



В поле тяготения Земли на тела массой m , действует сила

$$F = G \frac{mM}{r^2}.$$

При перемещении этого тела на расстояние dr от центра планеты затрачивается работа $dA = Fdr \cos \alpha$. Так как $\cos \alpha = -1$, получаем

$$dA = -G \frac{mM}{r^2} dr. \quad (23.1)$$

Если тело перемещать с расстояния r_1 до r_2 , то затрачиваемая работа

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} dr = m \left(\frac{GM}{r_2} - \frac{GM}{r_1} \right). \quad (23.2)$$

Из формулы (23.2) вытекает, что затраченная работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а зависит лишь от начального и конечного положения тела, т.е. силы тяготения консервативны, а поле тяготения является потенциальным.

С другой стороны известно, что

$$A = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2.$$

Из выражения (23.2) следует, что

$$U_1 - U_2 = -m \left(\frac{GM}{r_1} - \frac{GM}{r_2} \right). \quad (23.3)$$

Так как в формулы входят только разности потенциальных энергий в двух состояниях, то для удобства принимают потенциальную энергию при $r_2 \rightarrow \infty$ равной нулю. Тогда (23.3) запишется в виде $U_1 = -GmM/r_1$. Так как первая точка была выбрана произвольно, то

$$U = -G \frac{mM}{r}.$$

Величина $\varphi = U/m$ является энергетической характеристикой поля тяготения и называется потенциалом.

Потенциал поля тяготения φ – скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность

$$\varphi = -G \frac{M}{r}. \quad (23.4)$$

Поверхность, точки которой имеют одинаковый потенциал ($\varphi = const$), называется эквипотенциальной.

Рассмотрим взаимосвязь между потенциалом φ поля тяготения и его напряженностью g .

$$dA = -md\varphi = mgdl,$$

т.е.

$$g = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Величина $\frac{d\varphi}{dl}$ характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

$$\vec{g} = -grad\varphi, \quad (23.5)$$

где $grad\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}$ – градиент скаляра φ . Знак минус в формуле (23.5)

указывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала φ .

В качестве примера рассмотрим потенциальную энергию тела, находящегося на высоте h относительно Земли

$$U = -\frac{GmM}{R+h} - \left(-\frac{GmM}{R} \right) = \frac{GmMh}{R(R+h)},$$

где R – радиус Земли. Так как

$$F_m = GmM/R^2 \text{ и } g = F_m/m = GM/R^2,$$

То, учитывая условие $h \ll R$, получим

$$U = mGMh/R^2 = mgh.$$

§ 24

Космические скорости

Первый космический (или круговой) скоростью v_1 называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться во-круг Земли по круговой орбите.

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r}$$

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r}}.$$

Если $r \approx R$ и $g = GM/R^2$, тогда у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Второй космической (или параболической) скоростью v_2 называют ту наименьшую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли.

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_R^\infty G \frac{mM}{r^2} dr = g \frac{mM}{R},$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ км/с.}$$

Третьей космической скоростью v_3 называется скорость, которую надо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

$$v_3 = 16,7 \text{ км/с.}$$

§ 25

Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальных систем с ускорением, называются неинерциальными.

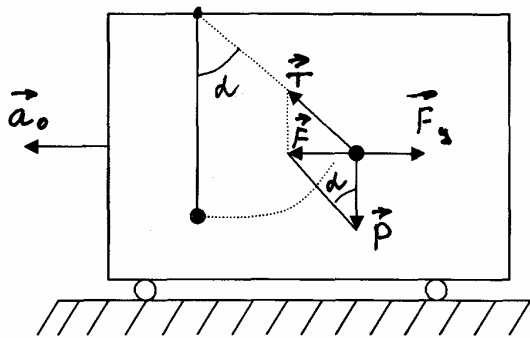
$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}, \quad (25.1)$$

где $\vec{a}'$ – ускорение тела в неинерциальной системе; $\vec{F}_{ин}$ – силы инерции; $\vec{F}$ – силы, обусловленные взаимодействием тел.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{ин}$$

1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета



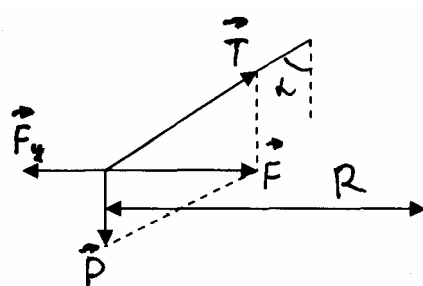
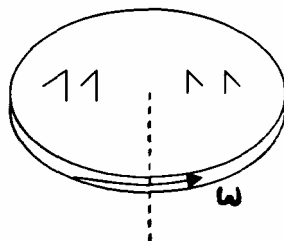
$$m\vec{a} = \vec{F} = \vec{T} + \vec{P}$$

$$F = mgtg\alpha = ma_0$$

$$tg\alpha = \frac{a_0}{g}$$

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_0. \quad (25.2)$$

2. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета



$$F = m\omega^2 R$$

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}.$$

При установившемся движении шарика

$$F = mgtg\alpha = m\omega^2 R$$

откуда

$$tg\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится, что возможно, если сила $\vec{F}$ уравнивается равной и противоположной по направлению ей силой $\vec{F}_ц$, которая является силой инерции. Силу $\vec{F}_ц$ называют **центробежной силой инерции**.

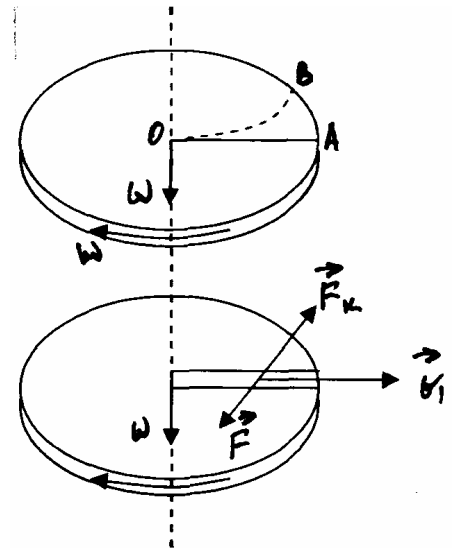
$$F_u = -m\omega^2 R. \quad (25.3)$$

Таким образом, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоится ли оно в той системе или движется относительно нее с какой-то скоростью.

3. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета

Для того, чтобы шарик катился по вращающемуся диску вдоль радиуса используют жестко укрепленный вдоль радиуса стержень или желоб. Вдоль желоба шарик движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_1$. В системе отсчета связанной с вращающимся диском на тело действует уравнивающая сила

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}_1 \times \vec{\omega}], \quad (25.4)$$



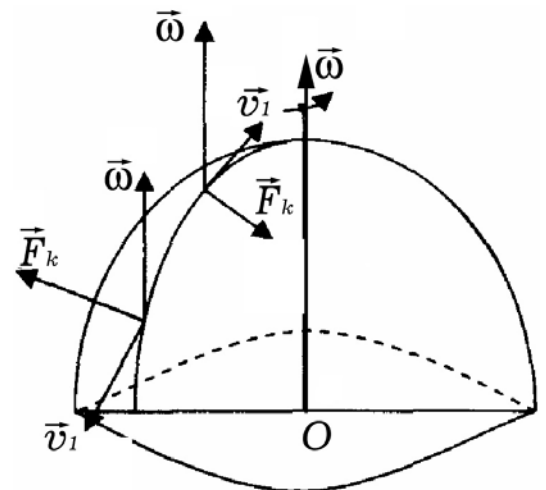
которую называют **кориолисовой силой инерции**. Сила Кориолиса действует только на тела, движущиеся относительно вращающейся системы отсчета, например Земли.

Пример действия силы Кориолиса на Земле

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета будет иметь вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_u + \vec{F}_c + \vec{F}_k.$$

Силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона. Силы инерции всегда являются внешними, следовательно, в неинерциальных системах отсчета нет замкнутых систем и законы сохранения импульса, энергии и момента импульса не выполняются.



Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (принцип эквивалентности Эйнштейна): все физические явления в поле тяготения

происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы.