ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА

Введение

Раздел физики, изучающий различные виды механического движения, причины их возникновения, условия относительного покоя, называется *механикой*. Механика включает в себя такие подразделы, как: *кинематика, динамика, статика, законы сохранения* и др. В кинематике для описания механического движения используется определенный математический аппарат, при этом причины возникновения движения тел не рассматриваются. В динамике, наоборот, при описании механического движения, прежде всего, рассматриваются причины возникновения движения. Статика изучает условия равновесия тел, на которые действуют другие тела. *Механическое движение — изменение положения тела относительно некоторого другого тела с течением времени.* Для описания движения используют систему отсчета, которая включает в себя тело отсчета, систему координат и устройство для определения времени, т.е. часы. Изучать движение начинают с движения материальной точки. *Материальная точка — реальное тело, размерами которого можно пренебречь в данных условиях.*

§1.1. Векторный способ описания движения

Положение движущейся материальной точки определяется уравнением:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{f(t)}, \tag{1.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор движущейся точки (см. рис.1.1).

Вектор перемещения соединяет начальное и конечное положение движущейся точки, и направлен от начального положения к конечному положению:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0. \tag{1.2}$$

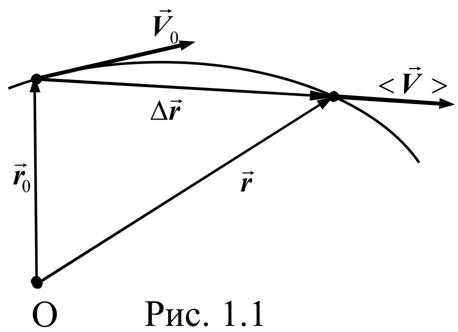


Рис. 1.1

Для характеристики быстроты движения вводится понятие средней и мгновенной скорости. Средняя скорость – отношение перемещения точки ко времени:

$$<\vec{V}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

Так как $\Delta t > 0$, то вектор средней скорости всегда направлен по перемещению, т.е. $<\vec{V}> \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$. Можно также ввести понятие средней путевой скорости движения. *Средней путевой скоростью движения точки называется* *отношение пройденного пути к интервалу времени* Δt *движения точки.* Так как пройденный путь величина скалярная, то и средняя путевая скорость является скалярной величиной.

Предельное значение, к которому стремится вектор средней скорости при стремлении интервала времени Δt *к нулю, называется мгновенной скоростью.* Обозначение мгновенной скорости:

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{V} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_t^{\,\prime}} . \qquad (1.4)$$

Такие пределы в математике получили название производной, т.е. мгновенная скорость - это производная от перемещения по времени. Мгновенная скорость характеризует скорость тела в данной точке в данный момент времени. *Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории движения.*

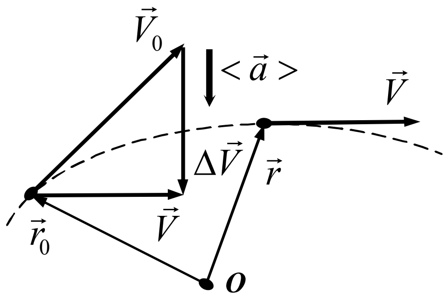


Рис. 1.2

Для характеристики быстроты изменения скорости вводят понятие ускорения движения. *Средним ускорением называется отношение вектора изменения скорости к интервалу времени, в течение которого это изменение произошло,* т.е.:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{\Delta t} . \qquad (1.5)$$

Так как $\Delta t > 0$, то вектор среднего ускорения всегда направлен по вектору изменения мгновенной скорости, т.е. $\langle \vec{a} \rangle \uparrow\uparrow \Delta \vec{V}$ (см. рис. 1.2). *Предельное значение, к которому стремится вектор среднего ускорения при условии, что интервал времени* Δt *стремится к нулю, называется мгновенным ускорением.*

Мгновенное ускорение — это производная от вектора скорости по времени. Мгновенное ускорение показывает, как быстро изменяется вектор скорости движущейся точки. Обозначение мгновенного ускорения:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_t^{\,\prime}} . \qquad (1.6)$$

Примеры векторных уравнений движения материальной точки

Равномерное прямолинейное движение ($\vec{V} = \overrightarrow{const}$):

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V} \cdot t} . \qquad (1.7)$$

Движение с постоянным ускорением ($\vec{a} = \overrightarrow{const}$):

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}} . \qquad (1.8)$$

Зависимость скорости от времени при движении точки с постоянным ускорением имеет вид:

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot t} . \qquad (1.9)$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте определение механического движения.
2. Дайте определение материальной точки.
3. Каким образом определяется положение материальной точки в пространстве в векторном способе описания движения?
4. В чем сущность векторного метода описания механического движения? Какие характеристики используются для описания этого движения?
5. Дайте определения векторов средней и мгновенной скорости. Как определяется направление этих векторов?
6. Дайте определение векторов среднего и мгновенного ускорений.
7. Какое из соотношений является уравнением движения точки с постоянным ускорением? Какое соотношение определяет зависимость вектора скорости от времени?

Примеры решения задач

Пример 1. *Радиус-вектор точки А относительно начала координат меняется со временем* t *по закону* $\vec{r}(t) = c \cdot t \cdot \vec{i} + f \cdot t^2 \cdot \vec{j}$*, где* c *и* f *- постоянные,* $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$*– орты осей* x *и* y*. Найти: а) уравнение траектории точки* $y(x)$*; б) зависимость от времени скорости* $\vec{v}$*, ускорения* $\vec{a}$ *и модулей этих величин; в) зависимость от времени угла* φ *между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{v}$*.*

Решение. *Выберем прямоугольную декартову систему координат* XOY*, начало координат совместим с началом вектора* $\vec{r}(t)$*. В этом случае для вектора* $\vec{r}(t)$ *справедливо соотношение*

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}, \qquad (1)$$

где $x(t), y(t)$*– зависимости координат движущейся точки от времени.*

Сравнивая выражение (1) с соотношением для $\vec{r}(t)$*, заданным в условии задачи, имеем следующие выражения для координат* $x(t), y(t)$*:*

$$x(t) = c \cdot t, \quad y(t) = f \cdot t^2.$$

Из первого уравнения выражаем время и подставляем в уравнение для координаты $y(t)$*, получим уравнение траектории материальной точки*

$$y(x) = \frac{f}{c^2} \cdot x^2,$$

траекторией которого является парабола.

Для определения вектора мгновенной скорости воспользуемся соотношением (1.4)

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(c\cdot t\cdot\vec{i}+f\cdot t^2\cdot\vec{j}\right)=c\cdot\vec{i}+2\cdot f\cdot t\cdot\vec{j}\,. \qquad (2)$$

В прямоугольной декартовой системе координат для вектора скорости справедливо следующее соотношение:

$$\vec{V}=V_x\cdot\vec{i}+V_y\cdot\vec{j}\,, \qquad (3)$$

где V_x, V_y *– проекции вектора скорости на оси координат.*

Сравнивая соотношения (2) и (3) для зависимостей проекции скорости от времени имеем соотношения:

$$V_x(t)=c,\quad V_y(t)=2\cdot f\cdot t\,. \qquad (4)$$

Величину вектора скорости находим из следующего выражения:

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{(c)^2+(2\cdot f\cdot t)^2}=\sqrt{c^2+4\cdot f^2\cdot t^2}\,. \qquad (5)$$

Вектор мгновенного ускорения находим из соотношения (1.6)

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(c\cdot\vec{i}+2\cdot f\cdot t\cdot\vec{j}\right)=0\cdot\vec{i}+2\cdot f\cdot\vec{j}=2\cdot f\cdot\vec{j}\,. \qquad (6)$$

Для зависимостей проекций ускорения на оси координат имеем выражения:

$$a_x=0,\quad a_y=2\cdot f\,. \qquad (7)$$

Зная проекции вектора ускорения на оси координат, величину вектора ускорения находим по формуле

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(0)^2+(2\cdot f)^2}=2\cdot f\,. \qquad (8)$$

Величина ускорения не зависит от времени, следовательно, точка совершает движение с постоянным ускорением, траекторией которого является парабола.

Для того чтобы найти зависимость от времени угла между векторами скорости и ускорения, запишем формулы для скалярного произведения этих векторов

$$\vec{V}\cdot\vec{a}=V_x\cdot a_x+V_y\cdot a_y,\ \text{или}\ \vec{V}\cdot\vec{a}=\left|\vec{V}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi.\Rightarrow\cos\varphi=\frac{V_x\cdot a_x+V_y\cdot a_y}{\left|\vec{V}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}\,.$$

С учетом соотношений (4), (5) и (7), (8) зависимость угла меду векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{V}$ *примет вид*

$$\varphi(t)=\arccos\left[\frac{c\cdot 0+(2\cdot f\cdot t)\cdot(2\cdot f)}{\sqrt{c^2+4\cdot f^2\cdot t^2}\cdot(2\cdot f)}\right]=\arccos\left[\frac{4\cdot f^2\cdot t}{2\cdot f\cdot\sqrt{c^2+4\cdot f^2\cdot t^2}}\right]$$

Таким образом, задача решена полностью.

§1.2. Координатный способ описания движения

В координатном способе для описания движения выбирают систему координат (например, декартову). Начало отсчета жестко закрепляют с выбранным телом (*телом отсчета*). Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ единичные орты, направленные в положительные стороны осей OX, OY и OZ соответственно. Положение точки задается координатами x, y, z.

Вектор мгновенной скорости определяется следующим образом:

$$\boxed{\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_x \cdot \vec{k} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}}, \qquad (1.10)$$

где V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости на оси координат, а $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ – производные от координат по времени.

Длина вектора скорости связана с его проекциями соотношением:

$$\boxed{\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}. \qquad (1.11)$$

Для вектора мгновенного ускорения справедливо соотношение:

$$\boxed{\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \cdot \vec{k}}, \qquad (1.12)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на оси координат, а $\frac{dV_x}{dt}$, $\frac{dV_y}{dt}$, $\frac{dV_z}{dt}$ – производные по времени от проекций вектора скорости.

Длина вектора мгновенного ускорения находится по формуле:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (1.13)$$

Примеры уравнений движения точки в декартовой системе координат

1. Равномерное прямолинейное движение ($\vec{V} = \overrightarrow{const}$):

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = x_0 + V_x \cdot t \\ y(t) = y_0 + V_y \cdot t \\ z(t) = z_0 + V_z \cdot t \end{cases}}. \qquad (1.14)$$

2. Движение с постоянным ускорением ($\vec{a} = \overrightarrow{const}$):

$$\text{Уравнения движения:} \boxed{\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \dfrac{a_x \cdot t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \dfrac{a_y \cdot t^2}{2} \\ z(t) = z_0 + V_{0z} \cdot t + \dfrac{a_z \cdot t^2}{2} \end{cases}}. \qquad (1.15)$$

Зависимости проекций вектора скорости на оси координат от времени:

$$\begin{aligned} V_X(t) &= V_{0X} + a_X \cdot t; \\ V_Y(t) &= V_{0Y} + a_Y \cdot t; \\ V_Z(t) &= V_{0Z} + a_Z \cdot t. \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем сущность координатного способа описания движения?
2. Каким соотношением определяется вектор мгновенной скорости? По какой формуле вычисляется величина вектора скорости?
3. Каким соотношением определяется вектор мгновенного ускорения? По какой формуле вычисляется величина вектора мгновенного ускорения?
4. Какие соотношения называют уравнениями равномерного движения точки?
5. Какие соотношения называют уравнениями движения с постоянным ускорением? По каким формулам рассчитывают проекции мгновенной скорости точки на оси координат?

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 2. *Движения двух мотоциклистов заданы уравнениями* $x_1(t) = 15 + t^2$ *и* $x_2(t) = 8 \cdot t$. *Описать движение каждого мотоциклиста. Найти координаты и время встречи.*

Решение. *Под описанием движения в данной задаче подразумевается следующее. Исходя из заданного уравнения движения, необходимо определить начальную координату тела, проекции векторов его начальной скорости и ускорения на ось координат. Исходя из полученной информации, необходимо установить характер движения тела (равноускоренное, равнозамедленное или равномерное), а также направление движения (по оси OX или против оси OX).*

Рассмотрим уравнение движения первого мотоциклиста. Из данного уравнения следует, что начальная координата равна $x_0 = 15\ м$. *Проекция вектора начальной скорости имеет нулевое значение, так как в данном уравнении отсутствует слагаемое, содержащее* t *в первой степени (*$V_{0x} = 0\ м/с$*). Из данного уравнения определяем проекцию вектора ускорения на ось OX (*$\frac{a_x}{2} \cdot t^2 = 1 \cdot t^2 \Rightarrow a_x = 2\ м/с^2$*). Из того, что величина начальной скорости равна нулю, и того, что мотоциклист двигался с ускорением, делаем следующий вывод: мотоциклист двигался равноускоренно. Так как проекция вектора ускорения положительная и начальная скорость равна нулю, делаем вывод о том, что мотоциклист двигался по оси OX.*

Рассмотрим движение второго мотоциклиста. Из уравнения его движения следует, что начальная координата равна нулю ($x_0 = 0\ м$*), величина проекции ускорения на ось координат равна также нулю (*$a_x = 0\ м/с^2$*), так как в уравнении отсутствует слагае-*

мое, содержащее t *во второй степени. Проекция его скорости на ось ОХ равна* $V_x = 8\ м/с$. *Из полученной информации следует, что движение второго мотоциклиста является равномерным (*$a_x = 0\ м/с^2$*).*

Поскольку проекция его скорости имеет положительный знак, то второй мотоциклист движется по оси ОХ. Из того, что заданы зависимости только одной координаты от времени вытекает то, что движение мотоциклистов является прямолинейным.

Определение координаты и времени встречи

Требуемые величины можно определить, если учесть, что в момент встречи координаты мотоциклистов равны. Приравняв правые части уравнений движения мотоциклистов, получим следующее уравнение:

$$15 + t^2 = 8 \cdot t \Rightarrow t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0.$$

Решив данное квадратное уравнение, получим следующие корни:

$$t_1 = 3\,с, \quad t_2 = 5\,с.$$

Оба корня положительные, следовательно, эти мотоциклисты встретятся дважды. Найдем координаты встречи из уравнения движения второго мотоциклиста:

$$x_2(3) = 8 \cdot 3 = 24\ м, \qquad x_2(5) = 8 \cdot 5 = 40\ м.$$

Пример 3. *Движение мотоциклиста задано уравнением* $x(t) = t^2 - 8 \cdot t + 15$. *Найти пройденный путь мотоциклиста и его перемещение за первые **8 с** движения. Найти среднюю путевую скорость и величину вектора средней скорости за первые **6 с** движения.*

Решение. Определение пройденного пути и перемещения

В начале решения данной задачи необходимо выяснить, имело ли место в данном движении изменение направления движения мотоциклиста. Для этого найдем зависимость скорости движения мотоциклиста от времени. Из уравнения его движения определяем проекцию скорости на ось ОХ ($V_{0x} = -8\ м/с$*) и проекцию вектора ускорения на эту ось (*$\frac{a_x}{2} = 1 \Rightarrow a_x = 2\ м/с^2$*). Записываем зависимость проекции скорости от времени:*

$$V_x = V_{0x} + a_x \cdot t \Rightarrow V_x = -8 + 2 \cdot t.$$

Определяем момент времени, когда проекция скорости мотоциклиста на ось ОХ равна нулю, т.е.

$$V_x = 0 \Rightarrow -8 + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow t = 4\ с.$$

Таким образом, в момент времени $t = 4\ с$ *имело место мгновенное изменение направления движения. Из уравнения движения мотоциклиста определяем его координаты в моменты времени* $t = 0\ с$, $t = 4\ с$ *и* $t = 8\ с$:

$$x(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 15 = 15\ м, \quad x(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1\ м,$$
$$x(8) = 8^2 - 8 \cdot 8 + 15 = 15\ м.$$

Находим пройденные пути до и после мгновенной остановки по формулам:

$$L_1 = |x(4) - x(0)| = |1 - 15| = 14\ м, \qquad L_2 = |x(8) - x(4)| = |15 - 1| = 14\ м.$$

Вычислим пройденный путь за первые 8 с движения $L = L_1 + L_2 = 28$ *м.*

Найдем величину проекции перемещения за первые 8 с движения мотоциклиста по формуле $S_x = x(8) - x(0) = 15 - 15 = 0$ *м. Таким образом, перемещение равно нулю.*

<u>Определение средней путевой и величины вектора средней скорости.</u>

Найдем координату мотоциклиста в момент времени $t = 6$ *с.*

$$x(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 15 = 3 \text{ м}.$$

Вычислим пройденный путь за 6 с движения по формуле:

$$L = L_1 + L_3 = 14 + |x(6) - x(4)| = 14 + |3 - 1| = 16 \text{ м}.$$

Определим величину средней путевой скорости движения:

$$V_{ср.п.} = \frac{L}{t} = \frac{16}{6} = 2{,}67 \text{ м/с}.$$

Найдем проекцию вектора перемещения на ось ОХ за 6 с движения:

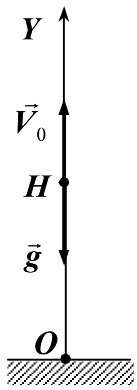
$$S_x = x(6) - x(0) = 3 - 15 = -12 \text{ м}.$$

Вычислим величину проекции вектора средней скорости движения мотоциклиста на ось ОХ по формуле:

$$V_{ср.п} = \frac{S_x}{t} = \frac{-12}{6} = -2 \text{ м/с}.$$

Величина вектора средней скорости при этом равна $V_{ср} = 2$ *м/с.*

Пример 4. *Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой скоростью* $V_0 = 19{,}6$ *м/с с промежутком времени* $\Delta t = 0{,}5$ *с. Через какое время после начала движения второго тела и на какой высоте встретятся тела?*



Решение. *Выберем систему координат так, чтобы ось OY была направлена вертикально вверх, начало координат совместим с поверхностью Земли. Координату точки бросания обозначим* H. *Изобразим в системе координат векторы начальной скорости и ускорения свободного падения. Возьмем два секундомера, первый секундомер включим в момент броска первого тела, второй секундомер — в момент броска второго тела. Показания первого секундомера обозначим через* t_1, *а второго — через* t_2. *Запишем уравнения движения тел в выбранных системах отсчета времени:*

$$y_1(t_1) = H + V_0 \cdot t_1 - \frac{g \cdot t_1^2}{2}; \quad y_2(t_2) = H + V_0 \cdot t_2 - \frac{g \cdot t_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Приведем данные уравнения движения в единую систему отсчета времени. Требуется найти момент встречи по второму секундомеру. В уравнение движения первого тела вместо t_1 *подставим* $t_1 = t_2 + \Delta t$, *получим следующие уравнения:*

$$y_1(t_2) = H + V_0 \cdot (t_2 + \Delta t) - \frac{g \cdot (t_2 + \Delta t)^2}{2}; \quad y_2(t_2) = H + V_0 \cdot t_2 - \frac{g \cdot t_2^2}{2}. \quad (2)$$

В момент встречи координаты тел совпадают, и, следовательно, приравняв правые части уравнений движения тел, получим уравнение для определения момента встречи:

$$y_1(t_2) = y_2(t_2) \Rightarrow H + V_0 \cdot (t_2 + \Delta t) - \frac{g \cdot (t_2 + \Delta t)^2}{2} = H + V_0 \cdot t_2 - \frac{g \cdot t_2^2}{2} . \qquad (3)$$

Решив данное уравнение, находим время встречи:

$$t_2 = \frac{V_0}{g} - \frac{\Delta t}{2} = \frac{19,6}{9,8} - \frac{0,5}{2} = 1,75 \ c \ . \qquad (4)$$

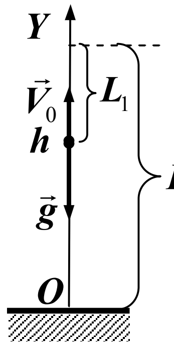
Зная время встречи, из уравнения движения второго тела находим координату встречи:

$$y_2(1,75) = H + 19,6 \cdot 1,75 - \frac{9,8 \cdot 1,75^2}{2} = H + 19,3 \ . \qquad (5)$$

Это значит, что координата точки встречи тел расположена на высоте 19,3 м выше точки бросания тел.

Пример 5. *Тело, брошено с балкона вертикально вверх со скоростью* $V_0 = 10 \ {}^{м}/_{c}$. *Высота балкона над поверхностью земли* $h = 12,5 \ м$. *Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость* $<V>$ *движения тела с момента бросания до момента падения на землю.*

Решение. *Пренебрегаем размерами тела, т.е. его движение рассматриваем как движение точки. Для решения задачи возьмем ось OY и направим ее перпендикулярно поверхности земли, начало отсчета (точка O) выберем на ее поверхности. Запишем общую зависимость для координат* y *от времени:*



$$y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{g_y \cdot t^2}{2}. \qquad (1)$$

Из рисунка определяем начальные параметры

$$y_0 = h; \quad V_{0y} = V_0 \cdot \cos 0^0 = V_0; \quad g_y = g \cdot \cos 180^0 = -g. \qquad (2)$$

С учетом начальных условий (2) уравнение движения для данной задачи примет вид

$$y(t) = h + V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 12,5 + 10 \cdot t - 5 \cdot t^2. \qquad (3)$$

Определим максимальную координату y *при движении тела вверх по оси OY, для этого найдем производную от правой части соотношения (3), и, приравняв полученное соотношение к нулю, получим следующее уравнение:*

$$V_0 - g \cdot t = 0. \qquad (4)$$

Из уравнения (4), находим момент времени, когда тело достигает максимальной высоты подъема. Затем определяем максимальную координату y_{max}

$$y_{\max} = y\left(\frac{V_0}{g}\right) = h + V_0 \cdot \frac{V_0}{g} - \frac{g \cdot \left(\frac{V_0}{g}\right)^2}{2} = h + \frac{V_0^2}{2 \cdot g}. \qquad (5)$$

Найдем время полета тела t_1*, для этого используем тот факт, что в момент приземления координата* y *точки равна нулю:*

$$y(t_1) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = h + V_0 \cdot t_1 - \frac{g \cdot t_1^2}{2}. \qquad (6)$$

Решим полученное квадратное уравнение (6), получим следующие корни:

$$t_1' = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}, \qquad t_1'' = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}. \qquad (7)$$

Второй корень t_1'' *не удовлетворяет условию задачи, потому что его величина отрицательная (*$V_0 < \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}$*). Имеем время полета тела:*

$$t_1' = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}. \qquad (8)$$

Согласно определения, величина средней путевой скорости равна:

$$V_{ср.п} = \frac{L}{t_1'} = \frac{L_1 + L_2}{t_1'}, \qquad (9)$$

где $L -$ *путь, пройденный телом за все время полета,* $L_1 -$ *путь, пройденный до верхней точки траектории,* $L_2 -$*путь, пройденный после верхней точки траектории до падения на землю.*

Из рисунка видно, что для величин L_1 *и* L_2 *выполняются следующие равенства:*

$$L_1 = y_{\max} - h, \qquad L_2 = y_{\max}. \qquad (10)$$

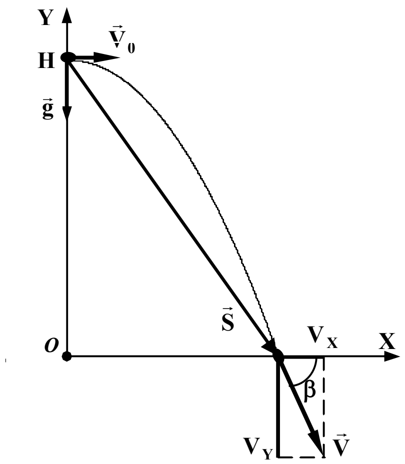
С учетом равенств (8) и (10) равенство (9) примет следующий вид:

$$V_{ср.п} = \frac{\left(h + \frac{V_0^2}{2 \cdot g} - h\right) + h + \frac{V_0^2}{2 \cdot g}}{\frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}} = \frac{g \cdot h + V_0^2}{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}. \qquad (11)$$

Найдем величину средней путевой скорости, для чего в равенство (11) подставляем численные значения величин h, V_0, g

$$V_{ср.п} = \frac{10 \cdot 12,5 + 10^2}{10 + \sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 12,5}} \approx 7,84\,\frac{м}{с}.$$

Пример 6. *Мальчик бросил горизонтально мяч из окна, находящегося на высоте* $h = 20\ м$ *со скоростью* $V_0 = 20\ м/с$. *Определить: а) время полета мяча; б) величину скорости в момент приземления; в) угол между вектором скорости и горизонтальной поверхностью; г) величину перемещения за время всего полета; д) величину средней скорости за время полета.*



Решение. *Для решения задачи возьмем прямоугольную систему координат XOY, причем ось OX направим горизонтально, а ось OY — вверх, перпендикулярно поверхности Земли. Начало координат совместим с поверхностью Земли. Изобразим траекторию движения мяча в данной системе координат. Запишем уравнения движения по осям OX и OY, а также зависимости проекций вектора скорости на оси координат от времени:*

$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}; \qquad V_x(t) = V_{0x} + a_x \cdot t;$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}; \qquad V_y(t) = V_{0y} + a_y \cdot t.$$

Определяем параметры, входящие в вышеприведенные соотношения:

$$x_0 = 0; \qquad V_{0x} = V_0; \qquad a_x = 0;$$

$$y_0 = h; \qquad V_{0y} = 0; \qquad a_y = -g.$$

С учетом начальных условий, запишем зависимости от времени координат и проекций вектора скорости:

$$x(t) = V_0 \cdot t; \qquad V_x(t) = V_0;$$

$$y(t) = h - \frac{g \cdot t^2}{2}; \qquad V_y(t) = -g \cdot t.$$

<u>1. Определение времени полета мяча.</u>

В момент падения мяча на поверхность Земли, его координата **Y** *равна нулю, т.е.* $y(t) = 0$. *Это позволяет нам получить следующее уравнение для определения времени падения мяча:*

$$y(t) = 0 \Rightarrow 0 = h - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2\ с.$$

<u>2. Определение величины скорости в момент приземления мяча.</u>

Поставив время падения мяча в зависимость от времени проекции скорости падения мяча на ось OY, получим следующее выражение:

$$V_y\left(\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right) = -g \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right) = \sqrt{2 \cdot h \cdot g}.$$

Величину вектора скорости находим по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20} = 28{,}3\ м/с\ .$$

3. Определение угла между вектором скорости и горизонтальной поверхностью.

Искомый угол найдем по формуле (см. рис. к данной задаче):

$$\cos\beta = \frac{V_x}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}} \Rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}}\right) = \arccos\left(\frac{20}{28{,}3}\right) = 45^0\ .$$

4. Определение величины перемещения.

*Определим вначале координату **X** мяча в момент приземления. Для этого, подставив в уравнение движения по оси ОХ время полета, получим выражение:*

$$x\left(\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right) = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\ .$$

Величину перемещения найдем по формуле $S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, *где* (x, y) – *координаты мяча в момент приземления;* (x_0, y_0) – *координаты начальной точки траектории мяча. Учитывая, что* $x_0 = 0,\ y_0 = h,\ x = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},\ \ y = 0$, *получим следующую формулу для вычисления величины перемещения:*

$$S = \sqrt{\left(V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot V_0^2}{g} + h^2}\ .$$

Поставив численные значения входящих в последнюю формулу величин, получим величину перемещения:

$$S = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 20^2}{10} + 20^2} = 44{,}7\ м.$$

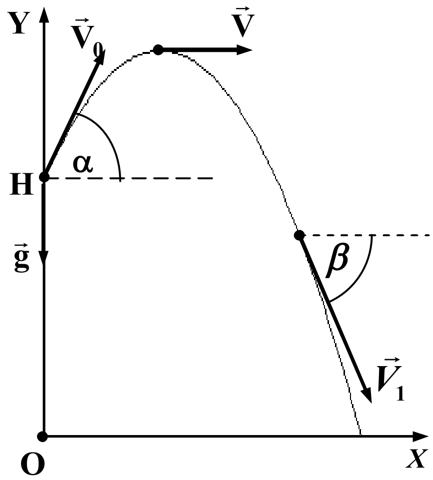
5. Определение величины средней скорости.

Величину средней скорости найдем по формуле:

$$V_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{44{,}7}{2} = 22{,}35\ м/с\ .$$

Пример 7. *Камень брошен с башни, имеющей высоту* $H = 20\ м$*, с начальной скоростью* $V_0 = 10\ м/с$ *под углом* $\alpha = 30^0$ *к горизонту. На каком расстоянии от основания башни упадет камень? Какова максимальная высота полета камня? Каково время полета камня? Каковы величина скорости* $\left|\vec{V}_1\right|$ *и угол* β *между вектором скорости и осью* OX *через 2 секунды полета? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение. *Решим данную задачу в системе отсчета, связанной с Землей. Выберем систему координат XOY так, чтобы оси координат находились в плоскости траектории камня. Ось OX направим горизонтально, а ось OY — вверх, перпендикулярно OX. Начало координат совместим с основанием башни. Определим начальные координаты, проекции скорости камня и ускорения свободного падения на оси координат:*



$$x_2 = 0; \qquad V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha; \qquad a_x = 0;$$

$$y_0 = H; \qquad V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha; \qquad a_y = -g.$$

С учетом полученных значений запишем уравнения движения камня и зависимость проекции скорости от времени на ось OY:

$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} \Rightarrow x(t) = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t;$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \Rightarrow y(t) = H + V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2};$$

$$V_y(t) = V_{0y} + a_y \cdot t \Rightarrow V_y(t) = V_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t.$$

1. **<u>Определение времени полета камня.</u>**

В момент падения камня на поверхность Земли его координата y равна нулю, т.е. $y(t) = 0$*. Отсюда вытекает следующее уравнение для определения времени полета:*

$$y(t) = 0 \Rightarrow H + V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0.$$

Подставляя численные значения величин, входящих в данное уравнение, получим уравнение:

$$5 \cdot t^2 - 5 \cdot t - 20 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 4 = 0.$$

Решив данное уравнение, получим следующие корни:

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \approx 2{,}56\ с,\ t_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \approx -1{,}56\ с.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как время полета положительно.

2. **<u>Определение расстояния от основания башни.</u>**

Искомое расстояние найдем из зависимости координаты $\boldsymbol{x}$ *от времени, подставив в это равенство время полета:*

$$x(1{,}618) = 10 \cdot \cos 30^0 \cdot 1{,}618 = 14{,}01\ м.$$

3. **<u>Определение максимальной высоты полета камня.</u>**

В верхней точке траектории движения камня вектор скорости параллелен оси OX, поэтому его проекция на ось OY равна нулю, т.е. $V_y = 0$. *Из этого условия определяем момент времени, когда камень находился в верхней точке:*

$$V_y(t) = 0 \Rightarrow 0 = V_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \Rightarrow t = \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}.$$

Подставив полученное значение времени в уравнение движения тела по си OY, получим максимальную высоту подъема:

$$h_{\max} = y\left(\frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right) = H + V_0 \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2 =$$

$$= H + \frac{(V_0 \cdot \sin\alpha)^2}{2 \cdot g} = 20 + \frac{(10 \cdot 0{,}5)^2}{2 \cdot 10} = 21{,}25\ м.$$

4. **<u>Определение величины вектора скорости $\left|\vec{V}_1\right|$ и угла β между вектором скорости и осью OX через 2 секунды полета.</u>**

Величина вектора скорости находится по проекциям данного вектора на оси координат, согласно следующей зависимости:

$$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(V_0 \cdot \cos\alpha)^2 + (V_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t)^2}.$$

В последнее выражение подставляем вместо времени 2 с и заданные величины V_0 *и* g, *получим искомую величину скорости*

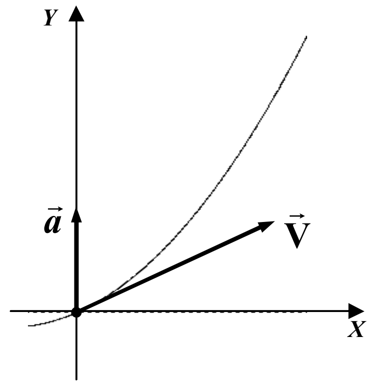
$$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{(10 \cdot \cos 30^0)^2 + (10 \cdot \sin 30^0 - 10 \cdot 2)^2} = 17{,}3\ м/с.$$

Величину угла β *между вектором скорости* $\left|\vec{V}_1\right|$ *и осью* OX *вычисляем по проекции и величине данного вектора из следующего соотношения:*

$$\cos\beta = \frac{V_{1x}}{\left|\vec{V}_1\right|} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{V_{1x}}{\left|\vec{V}_1\right|}\right) = \frac{10 \cdot \cos 30^0}{\sqrt{(10 \cdot \cos 30^0)^2 + (10 \cdot \sin 30^0 - 10 \cdot 2)^2}} \approx 60^0.$$

***Пример 8**.** *Частица движется в плоскости* $\boldsymbol{XOY}$ *с постоянным ускорением* $\vec{\boldsymbol{a}}$*, направление которого совпадает с положительным направлением оси* $\boldsymbol{y}$*. Уравнение траектории имеет вид* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}^2$*, где* $\boldsymbol{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\beta} -$ *положительные коэффициенты. Найти скорость частицы в начале координат.*

Решение. *Траекторией частицы является участок параболы. Изобразим ее в декартовой системе координат. Покажем на этом рисунке вектор скорости и вектор ускорения частицы в начале координат. Находим дифференциал от обеих частей заданного уравнения траектории движения частицы*



$$\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{\beta} \cdot 2 \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{dy} -$ *соответственно, дифференциалы координат* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$.

Выразим бесконечно малые изменения координат (дифференциалы) $\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{dy}$ *через проекции вектора скорости на оси координат:*

$$\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{V}_x \cdot \boldsymbol{dt}, \quad \boldsymbol{dy} = \boldsymbol{V}_y \cdot \boldsymbol{dt}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{dt} -$ *дифференциал времени.*

С учетом соотношений (2) равенство (1) примет вид

$$\boldsymbol{V}_y \cdot \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{V}_x \cdot \boldsymbol{dt} + \boldsymbol{\beta} \cdot 2 \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{V}_x \cdot \boldsymbol{dt}. \qquad (3)$$

Разделим обе части соотношения (3) на $\boldsymbol{dt}$*, получим следующую формулу:*

$$\boldsymbol{V}_y = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{V}_x + 2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{V}_x. \qquad (4)$$

В начале координат, т.е. при $\boldsymbol{x} = 0$*, формула (4) имеет вид*

$$\boldsymbol{V}_{0y} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{V}_{0x} + 2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot 0 \cdot \boldsymbol{V}_{0x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{V}_{0x}. \qquad (5)$$

Дифференцируем обе части равенства (4) по времени

$$\frac{\boldsymbol{dV}_y}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{V}_x + 2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{V}_x\right) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{dV}_x}{\boldsymbol{dt}} + 2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{V}_x + 2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \frac{\boldsymbol{dV}_x}{\boldsymbol{dt}}. \qquad (6)$$

С учетом того, что $\dfrac{\boldsymbol{dV}_x}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{a}_x$ *и* $\dfrac{\boldsymbol{dV}_y}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{a}_y$*, где* $\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y -$ *проекции вектора ускорения на оси координат, равенство (6) примет вид:*

*Задача повышенной сложности

$$a_y = \alpha \cdot a_x + 2\cdot\beta\cdot V_x + 2\cdot\beta\cdot x\cdot a_x. \qquad (8)$$

По условию задачи, вектор ускорения частицы направлен по оси OY, *поэтому* $a_x = |\vec{a}|\cdot\cos 90^0 = 0,\quad a_y = |\vec{a}|\cdot\cos 0^0 = |\vec{a}|$. *С учетом этого, а также при* $x = 0$, *последнее равенство упрощается:*

$$|\vec{a}| = 2\cdot\beta\cdot V_{0x}. \qquad (9)$$

Из последнего соотношения, находим проекцию V_{0x} *вектора скорости на ось* x *в начале координат:*

$$V_{0x} = \frac{|\vec{a}|}{2\cdot\beta}. \qquad (10)$$

Учитывая последнее соотношение, из равенства (5) находим проекцию вектора скорости на ось y *в начале координат:*

$$V_{0y} = \alpha\cdot V_{0x} = \alpha\cdot\frac{|\vec{a}|}{2\cdot\beta}. \qquad (11)$$

Длина вектора находится через его проекции на оси координат по формуле $|\vec{V}_0| = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}$. *Зная проекции вектора скорости на оси (см. (10), (11)), находим величину вектора скорости в начале координат:*

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2} = \sqrt{\left(\frac{|\vec{a}|}{2\cdot\beta}\right)^2 + \left(\alpha\cdot\frac{|\vec{a}|}{2\cdot\beta}\right)^2} = \frac{|\vec{a}|}{2\cdot\beta}\cdot\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Пример 9*[*]. *Частица движется в плоскости XOY из точки с координатами* $x_0 = y_0 = 0$ *м со скоростью* $\vec{V} = a\cdot\vec{i} + b\cdot x\cdot\vec{j}$, *где* a *и* b *– некоторые постоянные,* $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$ *– орты осей X и Y. Найти уравнение траектории и зависимости координат от времени.*

Решение. *Для определения траектории движения частицы (зависимость координаты y от координаты x), запишем соотношения для приращений координат* y *и* x *за промежуток времени* dt:

$$dx = V_x\cdot dt, \qquad dy = V_y\cdot dt. \qquad (1)$$

Из первого соотношения, находим бесконечно малый промежуток времени dt *и подставляем во второе соотношение. Получим следующее выражение:*

$$dy = \frac{V_y}{V_x}\cdot dx \qquad (2)$$

---

[*]Задача повышенной сложности

Из заданного в условии задачи выражения для вектора скорости, находим проекции данного вектора $V_x = a,\quad V_y = b \cdot x$. *Полученные выражения подставляем в соотношение (2), имеем следующее выражение:*

$$dy = \frac{b}{a} \cdot x \cdot dx. \tag{3}$$

Интегрируем это уравнение:

$$y(x) = \int_0^x \frac{b}{a} \cdot x \cdot dx = \frac{b}{2 \cdot a} \cdot x^2,$$

т.е. траекторией частицы является парабола.

Для определения уравнений движения частицы ($x(t)$ *и* $y(t)$*) воспользуемся соотношениями (1)*

$$dx = V_x \cdot dt = a \cdot dt \Rightarrow x(t) = \int_0^t a \cdot dt = a \cdot t,$$

$$dy = V_y \cdot dt = b \cdot x \cdot dt = b \cdot a \cdot t \cdot dt \Rightarrow y(t) = \int_0^t b \cdot a \cdot t \cdot dt = a \cdot b \cdot t^2.$$

Т.о. задача решена полностью.

§1.3. «Естественный» способ описания движения

Этот способ описания движения применяют в том случае, когда траектория движения точки заранее известна. Положение точки на траектории задают дуговой координатой ξ (кси)*. На траектории стрелкой указывают положительное направление дуговой координаты.

Уравнением движения является зависимость координаты ξ от времени, т.е.:

$$\xi = f(t) \tag{1.17}$$

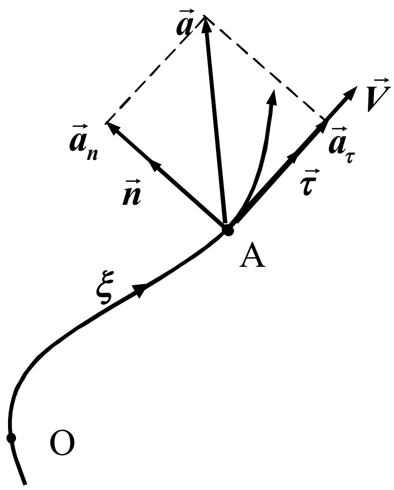


Рис. 1.3

Скорость точки. Введем единичный вектор $\vec{\tau}$, связанный с движущейся точкой A и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты ξ (см. рис. 1.3). Вектор $\vec{\tau}$ при движении точки изменяет свое направление, и, следовательно, не является постоянным вектором. Вектор мгновенной скорости $\vec{V}$ связан с ортом $\vec{\tau}$ соотношением:

$$\vec{V} = V_\tau \cdot \vec{\tau}, \tag{1.18}$$

---

* *Дуговая координата* – алгебраическая величина, численно равная пройденному пути точкой.

где V_τ – проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$ и равна производной от дуговой координаты по времени, т.е.:

$$\boxed{V_\tau = \frac{d\xi}{dt}}. \tag{1.19}$$

Ускорение точки. Вектор полного ускорения точки находят дифференцированием равенства (1.17) по времени, в результате чего получают равенство:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}}, \tag{1.20}$$

где $\dfrac{dV_\tau}{dt}$ – производная от проекции вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$ по времени, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, а ρ – радиус кривизны траектории в точке A. Первое слагаемое в правой части (1.20) это составляющая вектора полного ускорения на направление вектора $\vec{\tau}$, называемая тангенциальным ускорением, т.е.:

$$\boxed{\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau}}, \tag{1.21}$$

где $a_\tau = \dfrac{dV_\tau}{dt}$ – проекция тангенциального ускорения на направление вектора $\vec{\tau}$. *Тангенциальное ускорение показывает, как быстро меняется величина вектора скорости со временем.*

Второе слагаемое в правой части равенства (1.20) представляет собой составляющую вектора полного ускорения, направленную на направление вектора нормали $\vec{n}$, и называется нормальным ускорением. *Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.* Величина нормального ускорения находится по формуле:

$$\boxed{a_n = \frac{V^2}{\rho}}. \tag{1.22}$$

Модуль вектора полного ускорения находится по формуле:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}}. \tag{1.23}$$

Движение с постоянным по величине тангенциальным ускорением описывается уравнением:

$$\boxed{\xi(t) = \xi_0 + V_{0\tau} \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}}, \tag{1.24}$$

Зависимость проекции скорости от времени:

$$\boxed{V_\tau(t) = V_{0\tau} + a_\tau \cdot t} \tag{1.25}$$

где ξ_0 – величина дуговой координаты в начальный момент времени, V_τ – проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$, a_τ – тангенциальное ускорение.

<u>Правило знаков</u>. *Величина V_τ положительная, если точка движется в направлении вектора $\vec{\tau}$ (или в направлении возрастания дуговой координаты ξ), в противном случае, величина V_τ отрицательная. Знаки V_τ и a_τ совпадают при ускоренном движении, при замедленном движении – знаки противоположны.*

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем сущность «естественного» способа описания движения?

2. Каким соотношением определяется вектор мгновенной скорости? Как определяется знак проекции скорости V_τ на направление вектора $\vec{\tau}$?

3. В чем физический смысл тангенциального ускорения? Как по отношению к вектору скорости направлен вектор тангенциального ускорения при ускоренном и замедленном движениях?

4. В чем физический смысл нормального ускорения? Как по отношению к вектору скорости направлен вектор нормального ускорения?

5. Каким соотношением связана величина полного ускорения с величинами нормального и тангенциального ускорений?

6. Какое соотношение является уравнением движения в «естественном» способе описания движения?

7. Каким соотношением устанавливается зависимость от времени проекции вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$?

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 10. *Движение точки по окружности радиуса $\rho = 8\ м$ задано уравнением $\xi = A + B\cdot t + C\cdot t^2$, где ξ – дуговая координата, $A = 20\ м$, $B = 4\ м/с$, $C = -3\ м/с^2$. Найти скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени $t = 3\ с$.*

Решение. *В данной задаче движение точки описывается «естественным» способом. Зная зависимость дуговой координаты ξ, найдем выражение для скорости как производную от этой координаты по времени:*

$$V_\tau = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A + B\cdot t + C\cdot t^2\right) = B + 2\cdot C\cdot t.$$

При $t = 3\ с$ *имеем* $V_\tau = 4 + 2\cdot 3\cdot(-3) = -14\dfrac{м}{с}$.

В данном способе описания движения скорость является алгебраической величиной. Отрицательный ее знак указывает на то, что вектор скорости в данный момент направлен против орта $\vec{\tau}$. Вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты ξ.

Тангенциальное ускорение найдем, взяв производную от скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B + 2\cdot C\cdot t\right) = 2\cdot C = -6\,\frac{м}{с^2}.$$

Очевидно, что вектор тангенциального ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор скорости, а именно против орта $\vec{\tau}$.

Нормальное ускорение точки связано со скоростью движения точки и радиусом окружности соотношением $a_n = \dfrac{V_\tau^{\,2}}{\rho}$. *Подставим сюда найденное значение скорости и заданное значение радиуса окружности и произведем вычисления:*

$$a_n = \frac{\left(-14\right)^2}{8} = 24{,}5\,\frac{м}{с^2}.$$

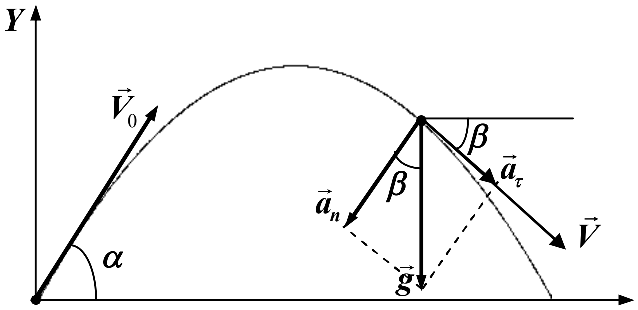
Полное ускорение является геометрической суммой векторов $\vec{a}_n$ *и* $\vec{a}_\tau$*:* $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

Модуль ускорения равен $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^{\,2} + a_\tau^{\,2}}$. *Подставив в это выражение найденные значения* a_n *и* a_τ, *получим величину полного ускорения точки:*

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{24{,}5^2 + \left(-6\right)^2} \approx 25{,}2\,\frac{м}{с^2}.$$

Пример 11. *Тело брошено со скоростью* $V_0 = 10\,{}^{м}\!/_{с}$ *под углом* $\alpha = 45^0$ *к горизонту. Определить: а) величину скорости; б) нормальное ускорение; в) тангенциальное ускорение; г) радиус кривизны траектории через* $t = 1\,с$ *после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.*

Решение. *В данной задаче пренебрегаем размерами тела. Рассматриваем его движение как движение точки с постоянным ускорением, равным* $\vec{g}$. *Записываем зависимости проекций вектора скорости от времени на оси декартовой системы координат*



$$\begin{aligned} V_x\left(t\right) &= V_{0x} + a_x\cdot t,\\ V_y\left(t\right) &= V_{0y} + a_y\cdot t. \end{aligned} \qquad (1)$$

Из рисунка видно, что

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0\cdot\cos\alpha;\\ V_{0y} &= V_0\cdot\sin\alpha;\\ a_x &= g\cdot\cos 90^0 = 0;\\ a_y &= g\cdot\cos 180^0 = -g. \end{aligned} \qquad (2)$$

С учетом полученных соотношений (2), равенства (1) примут вид:

$$\begin{aligned} V_x\left(t\right) &= V_0\cdot\cos\alpha,\\ V_y\left(t\right) &= V_0\cdot\sin\alpha - g\cdot t. \end{aligned} \qquad (3)$$

Величина вектора скорости связана с проекциями соотношением:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} \qquad (4)$$

Из соотношений (3), вместо проекций V_x *и* V_y *подставляем в равенство (4), имеем следующее соотношение:*

$$V = \sqrt{\left(V_0 \cdot \cos\alpha\right)^2 + \left(V_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t\right)^2}. \qquad (5)$$

Из формулы (5), находим величину вектора скорости при $t = 1\,c$ *:*

$$V = \sqrt{\left(10 \cdot \cos 45^0\right)^2 + \left(10 \cdot \sin 45^0 - 10 \cdot 1\right)^2} \approx 7{,}65 \frac{м}{c}.$$

Из рисунка видно, что величины нормального ускорения и ускорения свободного падения связаны соотношением

$$a_n = g \cdot \cos\beta, \qquad (6)$$

где $\cos\beta = \dfrac{V_x}{V} = \dfrac{V_0 \cdot \cos\alpha}{V}$.

Находим величину нормального ускорения в момент времени $t = 1\,c$

$$a_n = g \cdot \cos\beta = g \cdot \frac{V_0 \cdot \cos\alpha}{V} = 10 \cdot \frac{10 \cdot \cos 45^0}{7{,}65} \approx 9{,}24 \frac{м}{c^2}.$$

Тангенциальное ускорение при $t = 1\,c$ *вычислим по формуле:*

$$a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^{\ 2}} = \sqrt{10^2 - 9{,}24^2} \approx 3{,}82 \frac{м}{c^2}.$$

Радиус кривизны траектории в момент времени $t = 1\,c$ *связан с величинами скорости и нормального ускорения соотношением:*

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Откуда $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{7{,}65^2}{9{,}24} \approx 6{,}33\,м$.

Пример 12*[*]. *Точка движется по плоской траектории так, что ее тангенциальное ускорение* $a_\tau = a_0$, *а нормальное ускорение* $a_n = b \cdot t^4$, *где* a_0 *и* b *– положительные постоянные,* t *– время движения. В момент времени* $t = 0$ *точка начала двигаться с нулевой начальной скоростью. Найти радиус кривизны* ρ *траектории точки и модуль ее полного ускорения в зависимости от дуговой координаты* ξ .

Решение. *По определению тангенциального ускорения, бесконечно малое изменение проекции скорости на направление вектора* $\vec{\tau}$ *дается соотношением*

$$dV_\tau = a_\tau \cdot dt. \qquad (1)$$

Проинтегрируем данное соотношение, учтем при этом $a_\tau = a_0$, *получим зависимость проекции скорости от времени:*

[*]Задача повышенной сложности

$$V_\tau(t)=\int_0^t a_0\cdot dt=a_0\cdot t. \qquad (2)$$

Запишем соотношение для бесконечно малого изменения криволинейной координаты $d\xi$ *за промежуток времени* dt*:*

$$d\xi=V_\tau\cdot dt. \qquad (3)$$

Проинтегрируем соотношение (3) по времени, учтем при этом что $V_\tau=a_0\cdot t$*, получим зависимость криволинейной координаты от времени:*

$$\xi(t)=\int_0^t V_\tau\cdot dt=\int_0^t a_0\cdot t\cdot dt=\frac{a_0\cdot t^2}{2}. \qquad (4)$$

Выразим радиус кривизны траектории из соотношения (1.22), учтем при этом что $a_n=b\cdot t^4$ *и* $V_\tau(t)=a_0\cdot t$*, получим следующее уравнение:*

$$\rho=\frac{V_\tau^2}{a_n}=\frac{(a_0\cdot t)^2}{b\cdot t^4}=\frac{a_0^2}{b\cdot t^2}. \qquad (5)$$

Из соотношения (4), выразим время и подставим в уравнение(5), получим искомую зависимость для радиуса кривизны траектории:

$$\rho=\frac{a_0^2}{b\cdot\left(\sqrt{\dfrac{2\cdot\xi}{a_0}}\right)^2}=\frac{a_0^3}{2\cdot b\cdot\xi}.$$

Модуль полного ускорения находим по следующей формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{a_0^2+(b\cdot t^4)^2}=\sqrt{a_0^2+\left(b\cdot\left(\frac{2\xi}{a_0}\right)^2\right)^2}=a_0\cdot\sqrt{1+\left(\frac{4\cdot b\cdot\xi^2}{a_0^3}\right)^2}.$$

§1.4. Кинематика твердого тела. Поступательное движение.

К поступательному типу движения относят движения тел, при которых любая прямая, связанная с телом, остается параллельной самой себе в процессе всего движения. Примерами такого движения служат движение поезда по прямому участку пути, движение кабины колеса обозрения и др. При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые траектории, поэтому в любой момент времени перемещения, скорости и ускорения точек одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения тела к изучению движения какой-либо его точки, применив для этого либо векторный, либо координатный способы описания движения.

§1.5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг закрепленной оси, траектории движения всех точек тела представляют собой окружности с центрами, лежащими на оси вращения. Это позволяет описать движение какой либо одной точки тела, поскольку движение остальных точек является подобным. Для описания вращательного движения точки используют *полярную систему координат*, в которой положение точки задается координатами: углом φ между радиус–вектором $\vec{\rho}$, проведенным из начала отсчета (точка O_1) и полярной осью O_1P и радиус–вектором $\vec{\rho}$ (см. рис. 1.4). Начало отсчета O_1 совмещают с центром вращения точки, при таком выборе точки O_1 будет меняться только угол поворота. Используют при этом псевдо вектор угла $\vec{\varphi}$, который по величине равен углу φ, измеренному в радианах. Направление вектора $\vec{\varphi}$ определяется *по правилу буравчика. Вращаем буравчик от полярной оси O_1P в направлении радиус–вектора $\vec{\rho}$, при этом поступательное движение буравчика указывает на направление вектора $\vec{\varphi}$.*

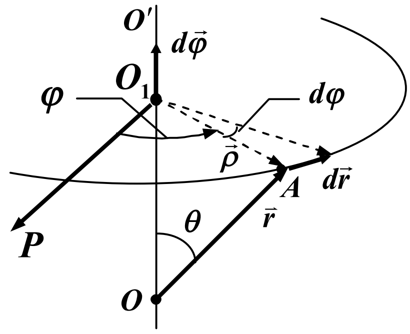


Рис. 1.4

Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt, твердое тело повернулось вокруг оси OO' на угол $d\varphi$ (см. рис. 1.4). Вектор радиуса вращения обозначим $\vec{\rho}$, радиус–вектор точки A — $\vec{r}$, а перемещение некоторой точки A твердого тела – $d\vec{r}$.

Вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$ называется вектор, направленный по оси вращения, а его величина равна углу поворота $d\varphi$, измереннoиму в радианах. *Направление вектора $d\vec{\varphi}$ определяют по правилу буравчика*. Вращая буравчик по направлению вращения точки, при этом направление его поступательного движение укажет направление вектора угла поворота $d\vec{\varphi}$.

Из рисунка 1.4 видно, что величина бесконечно малого перемещения $|d\vec{r}|$ и угол поворота $d\varphi$ связаны соотношением

$$|d\vec{r}| = r \cdot sin\theta \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi \ . \tag{1.26}$$

Справедливо так е и векторное равенство:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{\rho} \, . \tag{1.27}$$

Для характеристики быстроты изменения угла поворота вводят понятие вектора угловой скорости. *Угловая скорость есть производная от угла поворота по времени:*

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \tag{1.28}$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения, его направление совпадает с направлением вектора бесконечно малого поворота $d\vec{\varphi}$.

Вектор углового ускорения характеризует быстроту изменения вектора угловой скорости, и находится как производная от вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.29}$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора бесконечно малого изменения угловой скорости $d\vec{\omega}$. *При ускоренном характере вращения тела направление вектора углового ускорения совпадает с направлением векторов бесконечно малого угла поворота и угловой скорости, при замедленном характере вращения вектор углового ускорения направлен против вектора угловой скорости.*

Уравнением вращения тела вокруг неподвижной оси является зависимость вектора угла поворота от времени:

$$\vec{\varphi}(t) = \overrightarrow{f(t)}.$$

При решении задач используется проекция этого равенства на ось вращения (ось OZ). Ось OZ направляют по вектору угла поворота.

Примеры уравнений вращения тела вокруг неподвижной оси

1. Равномерное вращение тела ($\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$):

$$\varphi_z(\mathrm{t}) = \varphi_{0z} + \omega_z \cdot \mathrm{t}, \tag{1.30}$$

где φ_0 - величина угла поворота в начальный момент времени, ω - величина вектора угловой скорости.

2. Вращение с постоянным угловым ускорением ($\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{const}$):

$$\begin{gathered}
\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_{0z} \cdot t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}, \\
\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi_0 = \omega_{0z} \cdot t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}, \\
\Delta\varphi = \frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2 \cdot \varepsilon_z}, \\
\Delta\varphi = \frac{\omega_z + \omega_{0z}}{2} \cdot t.
\end{gathered} \tag{1.31}$$

где ε_z - проекция вектора углового ускорения на ось OZ.

Зависимость угловой скорости от времени:

$$\omega_Z(t) = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t. \tag{1.32}$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Какая система координат используется для описания движения точки по окружности? Какими координатами задается положение вращающейся точки на плоскости?

2. Сформулируйте определение псевдовектора угла поворота. Как определяется величина и направление этого вектора?

3. Дайте определение вектора угловой скорости. Как определяется направление данного вектора?

4. Дайте определение вектора углового ускорения. Как связаны между собой направления векторов угловой скорости и углового ускорения при ускоренном и замедленном движениях?

5. Какова зависимость угла φ_z от времени при равномерном движении точки по окружности?

6. Какими соотношениями описывается движение точки с постоянным угловым ускорением по окружности?

§1.6. Связь между линейными и угловыми величинами

Модуль вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ и изменение угла поворота $\Delta\varphi$ связаны соотношением:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \sin\theta \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \left|\vec{\rho}\right| \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2}, \tag{1.33}$$

где $\vec{r}$ - радиус–вектор точки A, $\vec{\rho}$ – ее радиус вращения (см. рис. 1.4).

Вектор линейной скорости $\vec{V}$ и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ связаны векторным равенством:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}\,. \tag{1.34}$$

В скалярном виде справедливо равенство:

$$\left|\vec{V}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \sin\theta = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{\rho}\right|. \tag{1.35}$$

Для вектора полного ускорения $\vec{a}$ справедливы соотношения (1.20)–(1.23), и, кроме того, имеем следующее векторное равенство:

$$\mathbf{a} = \vec{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{1.36}$$

где $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ - вектор тангенциального ускорения, $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ - вектор нормального ускорения.

Проекции вектора $\vec{a}$ на орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ (см. рис. 1.3) равны:

$$a_\tau = \varepsilon_z \cdot \rho\,,\ a_n = \omega^2 \cdot \rho\,. \tag{1.37}$$

Модуль полного ускорения равен:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \rho \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{1.38}$$

Вопросы для самоконтроля.

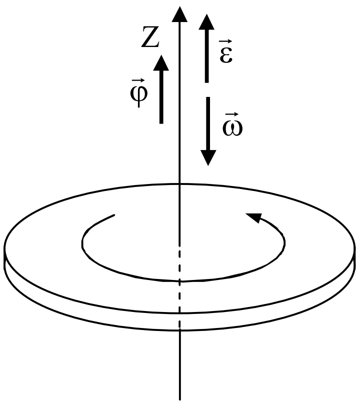
1. Каким соотношением связаны между собой линейная и угловая скорость точки?

2. Каким соотношением связаны между собой угловое ускорение точки с ее тангенциальным ускорением?

3. Каким соотношением связаны между собой угловая скорость точки с ее нормальным ускорением?

Примеры решения задач

Пример 13. *Диск радиусом* $\boldsymbol{r} = 20\,\boldsymbol{см}$ *вращается согласно уравнению* $\varphi = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{t}^2$, *где* $\boldsymbol{A} = 3\ \boldsymbol{рад}$, $\boldsymbol{B} = -1\ ^{рад}\!/_{c}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0{,}05}\ ^{\boldsymbol{рад}}\!/_{\boldsymbol{c^2}}$. *Определить угловую скорость, угловое, тангенциальное, нормальное и полное ускорение точки, находящейся на краю диска, в конце двадцатой секунды его вращения. Изобразить на рисунке векторы угловой скорости и углового ускорения.*



Решение. *Находим проекции векторов угловой скорости и углового ускорения из следующих соотношений:*

$$\omega_z(t) = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3 - 1\cdot t + 0{,}05\cdot t^2\right) = -1 + 0{,}1\cdot t,$$

$$\varepsilon_z(t) = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-1 + 0{,}1\cdot t\right) = 0{,}1.$$

Из последнего соотношения видно, что проекция углового ускорения не зависит от времени, следовательно, это движение с постоянным угловым ускорением. Из первого соотношения находим величину проекции угловой скорости через 20 с движения. $\omega_z(20) = -1 + 0{,}1\cdot 20 = -1\,\text{рад/с}$.

Для построения векторов угла поворота, угловой скорости и углового ускорения выбираем ось OZ, используем при этом правило «буравчика». Учитывая знаки проекций векторов $\vec{\omega}$ *и* $\vec{\varepsilon}$, *изображаем их на рисунке. Поскольку направление векторов* $\vec{\omega}$ *и* $\vec{\varepsilon}$ *противоположное, делаем вывод о том, что движение точки является равнозамедленным.*

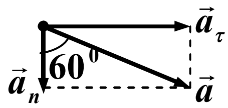
Из соотношений (1.37)–(1.38) находим нормальное, тангенциальное и полное ускорения:

$$\boldsymbol{a_n = \omega^2 \cdot r = 1^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2\,м/c^2};$$

$$\boldsymbol{a_\tau = \varepsilon \cdot r = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02\,м/c^2};$$

$$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}02^2} \approx 0{,}2\,м/c^2}.$$

Пример 14. *По дуге окружности радиусом* $\rho = 10\ м$ *движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки* $a_n = 10\ ^{м}/_{c^2}$ *; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол* 60^0. *Найти линейную и угловую скорость, тангенциальное и угловое ускорение точки.*



Решение. *Для нахождения величины вектора скорости воспользуемся следующим соотношением:*

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow V = \sqrt{a_n \cdot \rho} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10\ ^{м}/_{c}.$$

Для вычисления угловой скорости используем соотношение (1.37)

$$\omega = \frac{V}{\rho} = \frac{10}{10} = 1\ ^{рад}/_{c}.$$

Из рисунка к данной задаче вытекает соотношение , позволяющее вычислить величину вектора тангенциального ускорения

$$tg\, 60^0 = \frac{a_\tau}{a_n} \Rightarrow a_\tau = a_n \cdot tg\, 60^0 = 10 \cdot tg\, 60^0 \approx 17{,}3\ ^{м}/_{c^2}.$$

Для вычисления углового ускорения точки используем соотношение (1.35)

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{\rho} = \frac{17{,}3}{10} = 1{,}73\ ^{рад}/_{c^2}.$$

***Пример 15**.** *Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловым ускорением* $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_0 \cdot \sin\varphi$, *где* $\vec{\varepsilon}_0$ *– постоянный вектор,* φ *– угол поворота тела из начального положения. Найти угловую скорость* ω_z *тела в зависимости от угла* φ, *если при* $\varphi = 0$, *она было равна* ω_{0z}.

Решение. *Возьмем прямоугольную декартову систему координат, ось OZ которой совместим с осью вращения. Спроектировав заданное равенство на ось OZ, будем иметь следующее соотношение:*

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{0z} \cdot \sin\varphi.$$

Из соотношения (1.29) вместо ε_z *подставим в предыдущее равенство, получим:*

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_{0z} \cdot \sin\varphi.$$

При умножении обеих частей данного равенства на бесконечно малую величину угла поворота $d\varphi$, *получается соотношение:*

$$\frac{d\varphi}{dt} \cdot d\omega_z = \varepsilon_{0z} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \Rightarrow \omega_z \cdot d\omega_z = \varepsilon_{0z} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi.$$

---

*Задача повышенной сложности

Проинтегрировав обе части равенства, получим требуемую зависимость:

$$\int\limits_{\omega_0 z}^{\omega_z} \boldsymbol{\omega_z \cdot d\omega} = \int\limits_{0}^{\varphi} \boldsymbol{\varepsilon_{0z} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi} \Rightarrow \left(\frac{\boldsymbol{\omega_z}^2}{2} \right) \Bigg|_{\omega_0 z}^{\omega_z} = \left(-\boldsymbol{\varepsilon_{0z} \cdot \cos\varphi} \right) \Big|_0^{\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega_z}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{\omega_{0z}}^2}{2} = -\boldsymbol{\varepsilon_{0z} \cdot \cos\varphi} + \boldsymbol{\varepsilon_{0z}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_z} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_{0z}}^2 + \boldsymbol{\varepsilon_{0z}} - \boldsymbol{\varepsilon_{0z} \cdot \cos\varphi}}$$

§1.7. Плоское движение твердого тела

Плоское движение – такое движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях неподвижных в некоторой системе отсчета.

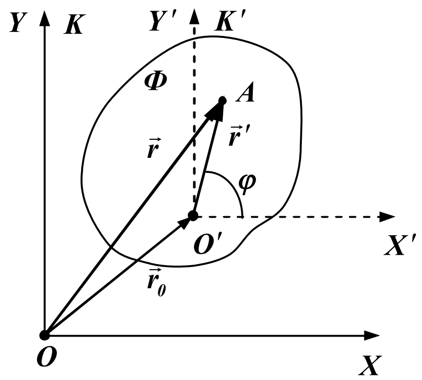


Рис.1.5

Примером плоского движения служит качение цилиндра по плоскости. Такое движение твердого тела можно представить как результат сложения двух движений, поступательного и вращательного.

Выберем две системы отсчета $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ (см. рис. 1.5). Пусть система $\boldsymbol{K'}$, связанная жестко с точкой $\boldsymbol{O'}$ твердого тела движется поступательно относительно системы $\boldsymbol{K}$ (см. рис 1.5).

При плоском движении тела его положение в процессе движения определяется положением такого сечения тела $\boldsymbol{\Phi}$, которое лежит в плоскости траектории $\boldsymbol{P}$ некоторой точки $\boldsymbol{A}$.

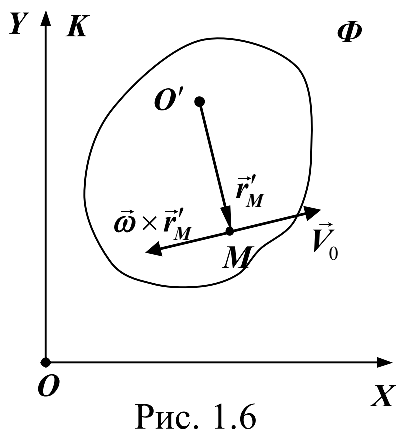


Рис. 1.6

Положение сечения $\boldsymbol{\Phi}$ в системе отсчета $\boldsymbol{K}$ определяется радиус–вектором $\vec{r}_0$ произвольной ее точки $\boldsymbol{O'}$ и углом $\boldsymbol{\varphi}$ между осью $\boldsymbol{O'X'}$ и вектором $\vec{r}\,'$ точки $\boldsymbol{A}$.

Заметим, что для абсолютно твердого тела модуль вектора $\vec{r}\,'$ не зависит от времени (вектор $\vec{r}\,'$ может только вращаться). Поэтому движение рассматриваемого сечения $\boldsymbol{\Phi}$ в системе $\boldsymbol{K}$ описывается уравнениями:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{1.39}$$

Для точки $\boldsymbol{A}$ рассматриваемого сечения векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ в системах отсчета $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,', \tag{1.40}$$

Для бесконечно малых перемещений имеем равенство:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}\,', \tag{1.41}$$

где $d\vec{r}$ – перемещение точки A в системе K, $d\vec{r}'$ – перемещение точки A в системе K', $d\vec{r}_0$ – перемещение начала отсчета (точка O') системы K' относительно K.

Скорость точки A в системе отсчета K и угловая скорость ее в системе K' связаны соотношением:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'. \tag{1.42}$$

Из (1.42) видно, что скорость любой точки рассматриваемого сечения складывается из скорости поступательного движения $\vec{V}_0$ произвольной точки O' этого сечения и линейной скорости $\vec{V}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$, обусловленной вращением вектора $\vec{r}\,'$ вокруг точки O'.

Очевидно, что векторы $\vec{V}$ и $\vec{V}\,'$ лежат в плоскости сечения Φ. Следовательно, можно найти такую точку M (не обязательно принадлежащую данному телу), линейная скорость которой в системе K равна нулю. Это достигается тогда, когда $\vec{V}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{r}_M\,'$ (см. рис. 1.6).

Ось, перпендикулярная сечению Φ и проходящая через точку M, называют мгновенной осью вращения. В этом случае плоское движение тела сводится к чисто вращательному движению вокруг мгновенной оси.

§1.8. Скорости и ускорения в различных системах отсчета

Обычно на практике механическое движение какого-то тела могут изучать несколько наблюдателей, находящихся в различных системах отсчета. В связи с этим возникает необходимость в сравнении результатов, полученных в различных системах отсчета. И, кроме того, от выбора системы отсчета зависит объем вычислений при решении практических задач.

Заметим, что ниже приведенные соотношения справедливы для скоростей движения значительно меньших скорости света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ $м/с$).

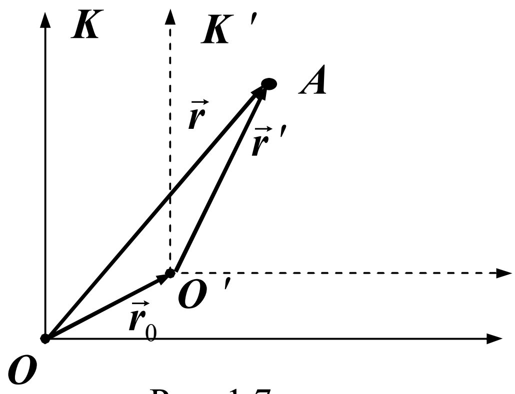


Рис. 1.7

Постановка задачи. Имеются две произвольные системы отсчета K и K', движущиеся относительно друг друга. Известны скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точки A в K – системе. Каковы значения величин $\vec{V}\,'$ и $\vec{a}\,'$ в K' – системе.

Рассмотрим три наиболее важных случая движения одной системы отсчета относительно другой.

1. $\boldsymbol{K'}$ **– система движется поступательно по отношению** $\boldsymbol{K}$ **– системе.**

Пусть положение движущейся точки $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{K}$ – системе определяется радиус–вектором $\vec{\boldsymbol{r}}$, а в $\boldsymbol{K'}$ – системе — радиус–вектором $\vec{\boldsymbol{r}}'$ (см. рис. 1.7). $\boldsymbol{K'}$ – система движется поступательно относительно $\boldsymbol{K}$ – системы. Положение начала отсчета $\boldsymbol{K'}$ – системы (точка $\boldsymbol{O'}$) определяет радиус–вектор $\vec{\boldsymbol{r}}_0$.

Очевидно что, векторы $\vec{\boldsymbol{r}}$ и $\vec{\boldsymbol{r}}'$ связаны соотношением:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{r}}'. \tag{1.43}$$

Для бесконечно малых перемещений $\boldsymbol{d\vec{r}}$ и $\boldsymbol{d\vec{r}'}$ точки $\boldsymbol{A}$ соответственно в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ – системах справедлива формула:

$$\boldsymbol{d\vec{r}} = \boldsymbol{d\vec{r}}_0 + \boldsymbol{d\vec{r}'}. \tag{1.44}$$

Скорости точки $\boldsymbol{A}$ ($\vec{\boldsymbol{V}}$ и $\vec{\boldsymbol{V}}'$) в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ – системах связаны следующим соотношением:

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}_0 + \vec{\boldsymbol{V}}', \tag{1.45}$$

где $\vec{\boldsymbol{V}}_0$ – скорость $\boldsymbol{K'}$ – системы относительно $\boldsymbol{K}$ – системы.

Для ускорений имеем равенство:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_0 + \vec{\boldsymbol{a}}', \tag{1.46}$$

где $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{a}}'$ – ускорение точки $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ – системах соответственно, $\vec{\boldsymbol{a}}_0$ – ускорение $\boldsymbol{K'}$ – системы относительно $\boldsymbol{K}$ – системы.

Из соотношений (1.44)—(1.46) следует, что перемещение, скорость и ускорение точки $\boldsymbol{A}$, в общем, зависят от выбора системы отсчета, т.е. не являются инвариантными величинами для различных систем отсчета.

Однако, в том случае, когда $\boldsymbol{K'}$ – система движется поступательно с постоянной скоростью ($\vec{\boldsymbol{V}}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{const}}$), ее ускорение $\vec{\boldsymbol{a}}_0 = \vec{0}$, и, следовательно, имеем равенство:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}'. \tag{1.47}$$

В этом случае ускорение точки $\boldsymbol{A}$ постоянно в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ – системах. Полученный вывод очень важен, поскольку позволяет установить критерий, согласно которому модно выбирать такие системы отсчета, в которых величины ускорений движущейся точки не зависят от системы отсчета. Этому критерию удовлетворяют, как мы позднее убедимся, инерциальные системы* отсчета.

---

* В инерциальных системах отсчета величина ускорения точки зависит только от сил, действующих на нее.

2. K' – система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, неподвижной в K – системе.* Совместим K и K' – системы, начало отсчета возьмем на оси вращения. В этом случае, в начальный момент времени радиус–вектор точки A можно выбрать одинаковым в K и K' – системах ($\vec{r} \equiv \vec{r}'$). Пусть $\vec{V}$ и $\vec{V}'$ скорости точки A в K и K' – системах, тогда перемещение этой точки в K' – системе равно $\vec{V}' \cdot dt$, а перемещение K' – системы относительно K — $d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ (см. рис. 1.8). При этом угол поворота K' – системы за время dt равен $d\vec{\varphi}$.

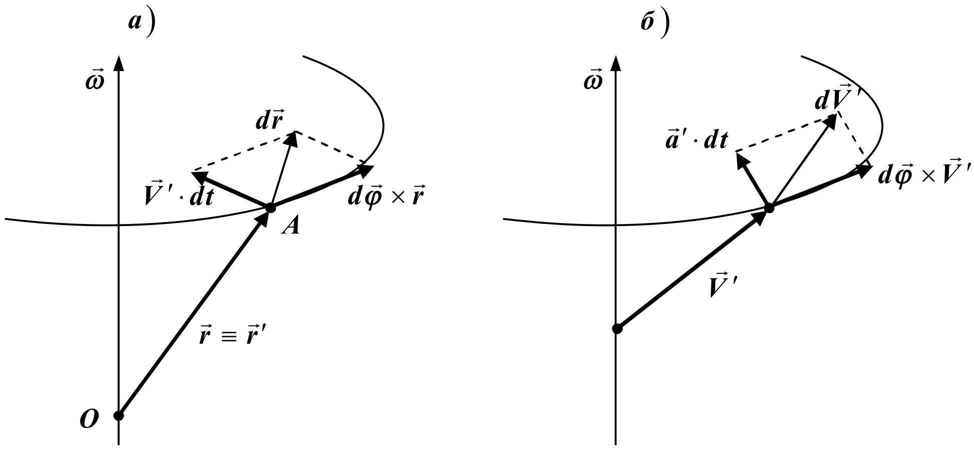


Рис. 1.8

Перемещение точки A в K – системе равно:

$$d\vec{r} = \vec{V}' \cdot dt + d\vec{\varphi} \times \vec{r}. \tag{1.48}$$

Соотношение для скоростей $\vec{V}$ и $\vec{V}$ в K и K' – системах имеет вид:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{1.49}$$

Ускорения $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ в K и K' – системах связаны соотношением:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{V}'\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right). \tag{1.50}$$

Второе слагаемое в равенстве (1.50) называют *кориолисовым ускорением*, а третье слагаемое — *осестремительным ускорением*:

$$\vec{a}_{кор} = 2 \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{V}'\right], \qquad \vec{a}_{ос} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right). \tag{1.51}$$

Пусть $\vec{\rho}$ – вектор, проведенный в точку A перпендикулярно оси вращения, тогда равенство (1.50) примет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{V}'\right) - \omega^2 \cdot \vec{\rho}. \tag{1.52}$$

Для определения направления вектора $\vec{a}_{кор}$, используют равенство (1.51) и правило буравчика, осестремительное ускорение направлено против вектора $\vec{\rho}$ к оси вращения K' – системы.

---

* Материал для дополнительного изучения

3. K' – система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью $\vec{V}_0$ относительно K – системы.*

Пусть $\vec{V}_0$ скорость поступательного движения точки O', являющейся точкой отсчета K' – системы, а $\vec{\omega}$ вектор угловой скорости вращения K' – системы. Этот случай объединяет два предыдущих.

Для векторов скорости $\vec{V}$ и $\vec{V}'$ точки в K и K' – системах справедлива формула:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \tag{1.53}$$

где все обозначения описаны ранее в пункте 2.

Ускорения точки A в K и K' – системах ($\vec{a}, \vec{a}'$) удовлетворяют следующему соотношению:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{V}'\right) - \omega^2 \cdot \vec{\rho} \,. \tag{1.54}$$

Следует заметить, что все обозначения величин, входящих в соотношения (1.53)–(1.54), описаны ранее в пункте 2.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какими соотношениями связаны между собой перемещения, линейная скорость и ускорение движущейся точки, если K' – система движется поступательно по отношению K – системе?

2. Какими соотношениями связаны между собой перемещения, линейная скорость и ускорение движущейся точки, если K' – система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, неподвижной в K – системе?

3. Какими соотношениями связаны между собой перемещения, линейная скорость и ускорение движущейся точки, если K' – система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью $\vec{V}_0$ относительно K – системы?

4. По какой формуле находится величина осестремительного ускорения? Куда направлен вектор осестремительного ускорения?

5. По какой формуле находится величина ускорения Кориолиса? По какому правилу определяется направление вектора ускорения Кориолиса?

---

* Материал для дополнительного изучения

<u>*Примеры решения задач*</u>

Пример 16. *Два велосипедиста движутся по прямолинейному участку шоссе равномерно. Первый велосипедист имеет скорость относительно Земли **10 м/с**, второй — **8 м/с**. Определить скорость первого велосипедиста относительного второго. Рассмотреть различные случаи направления скоростей движения велосипедистов.*

Решение. *Для решения задачи* $\boldsymbol{K}-$ *систему связываем с поверхностью Земли, а* $\boldsymbol{K'}-$ *систему —со вторым велосипедистом. Обозначим скорость первого велосипедиста в* $\boldsymbol{K}-$ *системе* $\vec{V}_1$, *а в* $\boldsymbol{K'}-$ *системе —*$\vec{V}_{12}$, *а скорость* $\boldsymbol{K'}-$*системы относительно* $\boldsymbol{K}-$ *системы* $\vec{V}_2$.

Рассмотрим первый случай*. Пусть велосипедисты движутся навстречу друг другу. Для того чтобы определить скорость первого велосипедиста относительно второго, выразим вектор скорости* $\vec{\mathbf{V}}_{12}$ *из закона сложения скоростей, будем иметь следующее векторное равенство:*

$$\vec{V}_{12}=\vec{V}_1-\vec{V}_2. \qquad (1)$$

Для того чтобы получить равенство для проекций векторов, входящих в последнее равенство, выберем систему отсчета следующим образом. Направим ось OX по направлению движения первого велосипедиста. Тогда вектор скорости второго велосипедиста в данной системе отсчета будет направлен против оси OX (см. рис.). Используя основное свойство векторных равенств, получим равенство для проекций векторов скоростей, входящих в векторное равенство (1):

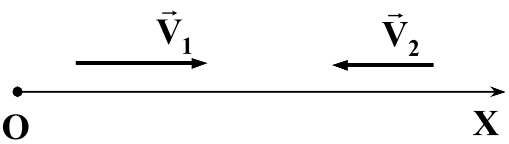


Рис. а.

$$V_{12x}=V_{1x}-V_{2x}=\left|\vec{V}_1\right|-\left(-\left|\vec{V}_2\right|\right)=\left|\vec{V}_1\right|+\left|\vec{V}_2\right|=10+8=18\ \boldsymbol{м/с}.$$

Из данного равенства видно, что проекции вектора скорости движения первого велосипедиста относительно второго имеют положительный знак, следовательно, вектор этой скорости направлен ко второму велосипедисту, т.е. они сближаются.

Рассмотрим второй случай*. Пусть векторы скоростей велосипедистов направлены так, как показано на рис. б. Запишем равенство для проекций векторов, входящих в векторное равенство (1), получим следующее выражение:*

$$\mathbf{V}_{12x}=\mathbf{V}_{1x}-\mathbf{V}_{2x}=\left|\vec{\mathbf{V}}_1\right|-\left|\vec{\mathbf{V}}_2\right|=10-8=2\ \mathbf{м/с}.$$

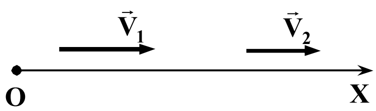


Рис. б.

В данном случае знак проекции скорости $\vec{V}_{12}$ *также положительный, т.е. велосипедисты сближаются.*

Рассмотрим третий случай*. Пусть векторы скоростей велосипедистов направлены так, как показано на рис. в. Запишем равенство для проекций векторов, входящих в векторное равенство (1), получим следующее выражение*

$$V_{12x}=V_{1x}-V_{2x}=\left(-\left|\vec{V}_1\right|\right)-\left(-\left|\vec{V}_2\right|\right)=$$
$$=-\left|\vec{V}_1\right|+\left|\vec{V}_2\right|=-10+8=-2\ \boldsymbol{м/с}.$$

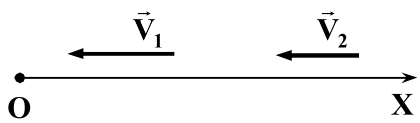


Рис. в.

Знак проекции скорости $\vec{\mathbf{V}}_{12}$ *отрицательный, следовательно, вектор скорости* $\vec{\mathbf{V}}_{12}$ *направлен против оси OX, т.е. вектор скорости* $\vec{\mathbf{V}}_{12}$ *направлен не ко второму велосипедисту, а от него. В этом случае велосипедисты удаляются друг от друга.*

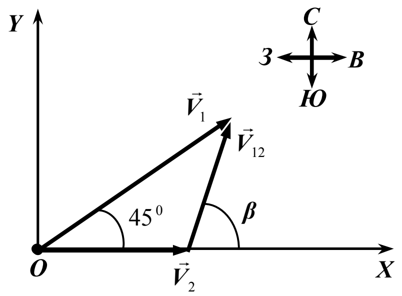
Пример 17. *Корабль идет на восток со скоростью* **36 км/ч**. *Известно, что дует ветер с юго-запада. Скорость ветра, измеренная на палубе корабля, равна* **15 м/с**. *Найти величину вектора скорости ветра относительно Земли.*

Решение. *Для решения данной задачи* $\boldsymbol{K}-$ *систему связываем с поверхностью Земли, а* $\boldsymbol{K'}-$ *систему —с кораблем. Обозначим скорость корабля в* $\boldsymbol{K}-$ *системе* $\vec{V}_1$, *а в* $\boldsymbol{K'}-$ *системе —*$\vec{V}_{12}$, *а скорость* $\boldsymbol{K'}-$*системы относительно* $\boldsymbol{K}-$ *системы* $\vec{V}_2$.

Из соотношения (1.43), имеем векторное равенство:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{12} + \vec{V}_2. \qquad (1)$$

Выберем систему отсчета так, чтобы ось OX была направлена на восток, а ось OY — на север. Изобразим векторы, входящие в равенство (1). Учтем при этом, что вектор скорости ветра, дующего с юго-запада, направлен на северо-восток под углом 45^0 *к оси OX.*



Используя теорему косинусов для построенных векторов скоростей, входящих в векторное равенство (1), получим следующее равенство (здесь и далее для простоты длины векторов будем обозначать не $\left|\vec{V}\right|$, *а* $\mathbf{V}$*):*

$$\mathbf{V}_{12}^2 = \mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_2^2 - 2\cdot\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2\cdot\cos 45^0.$$

Таким образом, получили квадратное уравнение для длины вектора $\vec{V}_1$. *Приведем последнее соотношение к следующему виду:*

$$\mathbf{V}_1^2 - 2\cdot\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2\cdot\cos 45^0 + \mathbf{V}_2^2 - \mathbf{V}_{12}^2 = 0.$$

Решив данное уравнение, получим следующие корни:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{2\cdot\mathbf{V}_2\cdot\cos 45^0 \pm \sqrt{4\cdot\mathbf{V}_2^2\cdot\cos^2 45^0 - 4\cdot\left(\mathbf{V}_2^2 - \mathbf{V}_{12}^2\right)}}{2}.$$

Подставив числовые данные, входящие в последнее выражение величин, получим:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{2\cdot 10\cdot\cos 45^0 \pm \sqrt{4\cdot 10^2\cdot\cos^2 45^0 - 4\cdot\left(10^2 - 15^2\right)}}{2}.$$

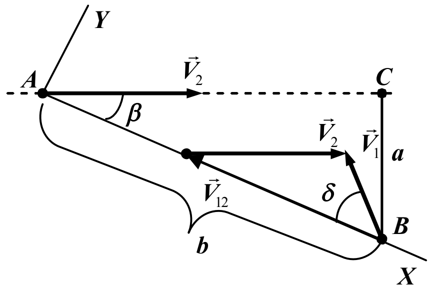
Откуда имеем следующие корни:

$$\mathbf{V}_1' = 20{,}3\,\text{м/с};$$
$$\mathbf{V}_1'' = -6{,}2\,\text{м/с}.$$

Значение второго корня не удовлетворяет условию задачи, так как длина вектора не может быть отрицательной.

***Пример 18*[*]*.** *По шоссе со скоростью* $V_2 = 16$ $\boldsymbol{м/с}$ *движется автобус. Человек находится на расстоянии* $\boldsymbol{a} = 50$ $\boldsymbol{м}$ *от шоссе и* $\boldsymbol{b} = 400$ $\boldsymbol{м}$ *от автобуса. В каком направлении должен бежать человек, чтобы оказаться в некоторой точке шоссе одновременно с автобусом, если он может бежать со скоростью* $V_1 = 4$ $\boldsymbol{м/с}$*?*

Решение. *Автобус и человек совершают поступательные движения, поэтому рассмотрим движения некоторой точки автобуса и человека. Изобразим рисунок для данной задачи. В качестве* $\boldsymbol{K}-$ *системы выберем систему, связанную с поверхностью Земли, а* $\boldsymbol{K'}-$ *систему закрепим с выбранной точкой автобуса. В данной системе отсчета автобус является неподвижным телом, а человек движется со скоростью* $\vec{V}_{12}$*. Причем, если человек хочет встретиться с автобусом, то его траектория в этой системе отсчета должна быть направлена на автобус, т.е. от точки B к точке A. Поскольку скорость в прямолинейном движении направлена по траектории, то вектор выбранной скорости человека относительно автобуса* $\vec{V}_{12}$ *должен быть направлен от точки B к A.*



Изобразим вектор $\vec{V}_{12}$ *на рисунке. Согласно закону сложения скоростей (1.43) скорость человека* $\vec{V}_1$ *и* $\vec{V}_{12}$ *в* $\boldsymbol{K}$ *и* $\boldsymbol{K'}-$ *системах связаны соотношением:*

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{12} + \vec{V}_2 \qquad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что вектор скорости человека относительно земли $\vec{V}_1$ *должен быть направлен так, чтобы сумма векторов скоростей человека относительно автобуса* $\vec{V}_{12}$ *и автобуса относительно Земли* $\vec{V}_2$*, равнялась бы вектору* $\vec{V}_1$*.*

Сложим векторы $\vec{V}_{12}$ *и* $\vec{V}_2$ *по правилу треугольника, получим вектор* $\vec{V}_1$*. Обозначим угол между вектором* $\vec{V}_1$ *и отрезком AB через* δ*. Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Используя основное свойство векторных равенств, запишем равенство для проекций векторов* $\vec{V}_1$*,* $\vec{V}_{12}$ *и* $\vec{V}_2$ *на ось OY, получим следующее равенство:*

$$V_{1y} = V_{12y} + V_{2y} \Rightarrow V_1 \cdot \sin\ \delta = 0 + V_2 \cdot \sin\ \beta \Rightarrow \sin\ \delta = \frac{V_2}{V_1} \cdot \sin\ \beta. \qquad (2)$$

Из треугольника ABC находим $\sin\beta$*.*

$$\sin\beta = \frac{a}{b}\ . \qquad (3)$$

Заменив $\sin\beta$ *в формуле (2) выражением, приведенным в соотношении (3), получим формулу для вычисления угла между направлением вектора скорости человека относительно земли и отрезком AB:*

[*]Задача повышенной сложности

$$\sin\delta = \frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{a}{b} \Rightarrow \delta = \arcsin\left(\frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{a}{b}\right). \qquad (4)$$

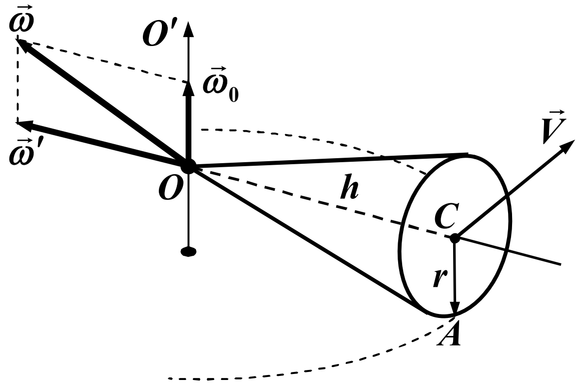
Подставим численные значения величин, входящих в формулу (4), получим величину угла δ *:*

$$\delta = \arcsin\left(\frac{16}{4}\cdot\frac{50}{400}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\ \ \textit{рад} = 30^0 .$$

Человек должен бежать под углом 30^0 *к отрезку, соединяющего его начальное положение и начальное положение автобуса.*

Пример 19*. *Круглый конус с радиусом основания* r *и высотой* h *катится без скольжения по поверхности стола, как показано на рисунке. Вершина конуса закреплена шарнирно в точке* O *на уровне точки* C *– центра основания конуса. Точка* C *движется с постоянной скоростью* V *. Найти: 1) угловую скорость* ω *конуса относительно Земли; 2) его угловое ускорение.*

Решение. *Для решения данной задачи,* K *– систему связываем с поверхностью Земли (ось* OO' *), а* K' *– систему —с осью симметрии конуса (ось* OC *). Вектор угловой скорости* $\vec{\omega}'$ *точки* A *в* K' *– системе определяем по правилу буравчика и направляем его по оси* OC *(см. рис.). Вектор угловой скорости* $\vec{\omega}_0$ *самой* K' *– системы (ось* OC *) также определяем по правилу буравчика и направляем его по оси* OO' *.*



Вектор угловой скорости точки A *относительно Земли равен векторной сумме векторов* $\vec{\omega}'$ *и* $\vec{\omega}_0$*, т.е.:*

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0 \qquad (1)$$

Т.к. оси OO' *и* OC *взаимно перпендикулярны (см. условие задачи), то для величин векторов* $\vec{\omega}$ *,* $\vec{\omega}'$ *и* $\vec{\omega}_0$ *справедливо соотношение:*

$$\omega = \sqrt{(\omega')^2 + (\omega_0)^2}. \qquad (2)$$

Т.к. конус движется без проскальзывания, то линейная скорость точки A *относительно оси* OC *и линейная скорость самой оси* OC *одинаковы. Учитывая это, можно записать следующие соотношения:* $\omega_0 = \dfrac{V}{h}$ *и* $\omega' = \dfrac{V}{r}$*.Подставив последние выражения в соотношение (2), получим искомое уравнение для величины угловой скорости:*

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{V}{r}\right)^2 + \left(\frac{V}{h}\right)^2} = \frac{V}{r}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}.$$

---

*Задача повышенной сложности

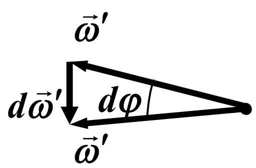
Для нахождения вектора углового ускорения, продифференцируем равенство (1)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}' + \vec{\omega}_0\right) = \frac{d\vec{\omega}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}. \qquad (3)$$

Равенство (3) можно упростить, если учесть тот факт, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_0$ *не меняется со временем ни по величине, ни по направлению. Это означает то, что его производная по времени равна нулю. Для вектора углового ускорения имеем следующее соотношение:*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}'}{dt}. \qquad (4)$$

Найдем бесконечно малое изменение вектора угловой скорости $d\vec{\omega}'$ *за бесконечно малый промежуток времени движения* dt. *Вектор* $\vec{\omega}'$, *оставаясь постоянным по величине, поворачивается в горизонтальной плоскости на угол* $d\varphi$ *(см. рис.). Величина вектора* $d\vec{\omega}'$ *связана с бесконечно малым углом поворота* $d\varphi$ *следующим соотношением:*



$$d\omega' = \omega' \cdot d\varphi. \qquad (5)$$

Величину угла поворота $d\varphi$ *выразим через угловую скорость* ω_0:

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt. \qquad (6)$$

Правую часть равенства (6) подставим в уравнение (5) вместо $d\varphi$, *получим следующее выражение для величины вектора* $d\vec{\omega}'$:

$$d\omega' = \omega' \cdot \omega_0 \cdot dt. \qquad (7)$$

В векторном виде равенство (7) имеет вид:

$$d\vec{\omega}' = \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}' \cdot dt. \qquad (8)$$

Поделив обе части равенства (8) на бесконечно малый промежуток времени dt, *получим искомое соотношение для вектора углового ускорения:*

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}'.$$

Последнее уравнение позволяет найти величину вектора углового ускорения:

$$\varepsilon = \omega_0 \cdot \omega' \cdot \sin 90^0 = \omega_0 \cdot \omega' = \frac{V}{h} \cdot \frac{V}{r} = \frac{V^2}{h \cdot r}.$$

Пример 20 [*]***.*** *Горизонтально расположенный стержень вращается с постоянной угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}$ *вокруг вертикальной оси, укрепленной на столе и проходящей через один из концов стержня. По стержню движется небольшая муфта. Ее скорость относительно стержня меняется по закону* $\vec{V}' = b \cdot \vec{r}'$, *где* b *– постоянная величина,* $\vec{r}'$ *– радиус–вектор, характеризующий расстояние муфты от оси вращения. Найти скорость* $\vec{V}$ *и ускорение* $\vec{a}$ *муфты относительно поверхности земли.*

Решение. *Для решения задачи выберем две системы отсчета* K *и* K'. K *–систему закрепим нас поверхности земли, а* K' *– систему совместим с осью вращения и заставим вращаться с угловой скоростью* ω.

Наблюдатель, в K' *– системе, будет видеть только поступательное движение муфты. В* K *– системе движение представляет собой сложение двух движений: поступательного относительно оси вращения и вращательного с угловой скоростью* ω.

Имеем K' *–систему вращающуюся с постоянной угловой скоростью* ω *вокруг оси, неподвижной в* K *– системе. Для нахождения вектора скорости используем соотношение (1.48)* $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. *С учетом условия задачи данное соотношение примет вид:*

$$\vec{V} = b \cdot \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \qquad (1).$$

Векторы $b \cdot \vec{r}'$ *и* $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ *взаимно перпендикулярны, поэтому модуль вектора скорости* $|\vec{V}|$ *находим по теореме Пифагора:*

$$|\vec{V}| = \sqrt{|b \cdot \vec{r}|'^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2} = \sqrt{|b \cdot \vec{r}'|^2 + |\omega \cdot r' \cdot \sin 90^0|^2}, \text{ или}$$

$$\boxed{|\vec{V}'| = |\vec{r}'| \cdot \sqrt{b^2 + \omega^2}}.$$

Вычислим вектор ускорения $\vec{a}'$ *в* K' *– системе:*

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d}{dt}(b \cdot \vec{r}') = b \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} = b \cdot \vec{V}' = b \cdot (b \cdot \vec{r}') = b^2 \cdot \vec{r}. \qquad (2)$$

Ускорение $\vec{a}$ *в* K *– системе находим по формуле (1.50), учтем при этом, что* $\vec{\rho} = \vec{r}'$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{V}') - \omega^2 \times \vec{\rho} = b^2 \cdot \vec{r}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times (b \cdot \vec{r}')] - \omega^2 \times \vec{r}'. \qquad (3)$$

После математических преобразований уравнение (3) примет вид:

$$\vec{a} = (b^2 - \omega^2) \cdot \vec{r}' + 2 \cdot b \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}']. \qquad (4)$$

Вектор $(b^2 - \omega^2) \cdot \vec{r}'$ *сонаправлен с вектором* $\vec{r}'$, *а вектор* $2 \cdot b \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}']$ *перпендикулярен* $\vec{r}'$, *следовательно, векторы* $(b^2 - \omega^2) \cdot \vec{r}'$ *и* $2 \cdot b \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}']$ *взаимно перпендикулярны. С учетом этого найдем модуль вектора ускорения* $\vec{a}$ *по теореме Пифагора:*

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{|(b^2 - \omega^2) \cdot \vec{r}'|^2 + |2 \cdot b \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}']|^2} = \\ &= \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 \cdot (\vec{r}')^2 + (2 \cdot b \cdot \omega \cdot r' \cdot \sin 90^0)^2}. \end{aligned} \qquad (5)$$

После алгебраических преобразований выражений для модуля вектора ускорения $\vec{a}$ *примет окончательный вид:*

$$\boxed{|\vec{a}| = (b^2 + \omega^2) \cdot |\vec{r}'|}.$$

[*] Задача повышенной сложности

Варианты заданий для практических занятий

Вариант №1
⊕⊕ ***Задача №1.*** Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = A \cdot (\vec{i} \cdot \cos\omega t + \vec{j} \cdot \sin\omega t)$, где $A = 0{,}5\ м$, $\omega = 5\ рад/с$. Найти уравнение траектории. Начертить траекторию движения точки. Найти выражение $\vec{V}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для $t = 1\ c$ вычислить: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.
⊕⊕ ***Задача №2.*** Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Высота балкона над поверхностью земли равна 12,5 м. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость с момента бросания до момента падения на землю.
⊕⊕ ***Задача №3.*** Мяч брошен со скоростью V_0=10 м/с под углом $\alpha=45^0$ к горизонту. На какую высоту поднимется мяч? На каком расстоянии от места бросания он упадет на землю? Какое время он будет в движении?
⊕⊕ ***Задача №4.*** Точка движется по окружности радиусом 2м согласно уравнению $\xi(t) = A + B \cdot t^3$, где В=4 м/с^3. В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному? Определить полное ускорение в этот момент.
⊕⊕ ***Задача №5.*** Камень брошен с высокой башни в горизонтальном направлении с начальной скоростью 40м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в момент e=2с после начала движения.
⊕⊕ ***Задача №6.*** Диск радиусом 20см вращается согласно уравнению $\varphi(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^3$, где А=3рад, В= –1 рад/с, С=0, 1рад. /с^3. Определить угловую скорость, угловое, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени равного 10с.
⊕⊕⊕ ***Задача №7.*** Радиус-вектор точки А относительно начала координат меняется со временем t по закону $\vec{r}(t) = c \cdot t \cdot \vec{i} + f \cdot t^2 \cdot \vec{j}$, где c и f – постоянные, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей X и Y. Найти: а) уравнение траектории точки y(x); изобразить ее график; б) зависимость от времени вектора скорости, ускорения и модулей этих величин; в) зависимость от времени угла φ между векторами скорости и ускорения.
⊕⊕⊕ ***Задача №8.*** Частица движется в положительном направлении оси X так, что ее скорость меняется по закону $V = c \cdot \sqrt{x}$, где c – положительная постоянная. Имея в виду, что в момент t=0 она находилась в точке x=0, найти: а) зависимость от времени скорости и ускорения частицы; б) среднюю скорость ее за время, в течении которого она пройдет первые s метров пути.
⊕⊕⊕ ***Задача №9.*** Твердое тело вращается, замедляясь, вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ε пропорциональным $\sqrt{\omega}$, где ω – его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент его угловая скорость была равна ω_0.

Вариант №2
⊕⊕ ***Задача №1.*** Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = A\cdot(\vec{i}\cdot\cos\omega t + \vec{j}\cdot\sin\omega t)$, где $A = 2{,}5\ м$, $\omega = 2\ рад/с$. Найти уравнение траектории. Начертить траекторию точки. Найти выражение $\vec{V}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для $t = 1\ с$ вычислить: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.
⊕⊕ ***Задача №2.*** Вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с брошен камень. Через 1 с после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте встретятся камни?
⊕⊕ ***Задача №3*** Мяч брошен со скоростью V_0=10 м/с под углом α=60^0 к горизонту. Записать зависимость координат точки и проекций ее скорости от времени. Определить величину перемещения за 1 с полета. Какое время он находится в движении?
⊕⊕ ***Задача №4.*** Движение точки по окружности радиусом 4м задано уравнением $\xi(t) = A + B\cdot t + C\cdot t^2$, где А=20м, В= – 4м/с, С=2м/с^2. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени 1с.
⊕⊕ ***Задача №5.*** Камень брошен с поверхности Земли с начальной скоростью 40м/с по углом 30^0 к горизонту. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в момент t=3 с после начала движения.
⊕⊕ ***Задача №6.*** Диск радиусом 20см вращается согласно уравнению $\varphi(t) = A + B\cdot t + C\cdot t^2$, где А=3рад, В= –1 рад/с, С=0, 1рад. /с^2. Определить угловую скорость, угловое, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени равного 5с
⊕⊕⊕ ***Задача №7.*** Радиус-вектор точки А относительно начала координат меняется со временем t по закону $\vec{r}(t) = A\cdot t\cdot\vec{i} + B\cdot t^3\cdot\vec{j}$, где А и В – постоянные, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей X и Y. Найти: а) уравнение траектории точки y(x); изобразить ее график; б) зависимость от времени вектора скорости, ускорения и модулей этих величин; в) зависимость от времени угла φ между векторами скорости и ускорения.
⊕⊕⊕ ***Задача №8.*** Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна V_0. Благодаря ветру, шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $V_x = \alpha\cdot y$, где α – постоянная, y – высота подъема. Найти зависимости от высоты подъема: а) величины сноса шара x(y); б) тангенциального и нормального ускорений шара.
⊕⊕⊕ ***Задача №9.*** Точка движется по дуге окружности радиуса R. Ее скорость зависит от пройденного пути s по закону $v = \alpha\cdot\sqrt{s}$, где α – постоянная величина. Найти угол φ между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от s.