==================== ГЛАВА II ====================

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§2.1. Первый закон Ньютона

В кинематике рассматривается описание простейших типов механических движений. При этом не затрагиваются причины вызывающие изменения положения тела относительно других тел, а система отсчета выбирается из соображений удобства при решении той или иной задачи. В принципе, можно взять любую из бесчисленного множества систем отсчета.

Однако, законы механики в различных системах отсчета имеют, строго говоря, различный вид. Возникает задача выбора такой системы отсчета, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Такая система отсчета, очевидно, наиболее удобна для описания механических явлений.

Выясним, от чего зависит ускорение частицы в некоторой произвольной системе отсчета. Какова причина этого ускорения? Экспериментально установлено, что этой причиной могут быть как действие на данную частицу каких-то определенных тел, так и свойства самой системы отсчета (см. **§1.8**).

Ньютон предположил, что существует такая система отсчета, в которой ускорение материальной точки обусловлено только взаимодействием ее с другими телами и не зависит от выбора системы отсчета. Материальная точка, не подверженная действию никаких других тел, движется относительно такой системы отсчета прямолинейно и равномерно, или, как говорят, по инерции. Такую систему отсчета называют *инерциальной*,

Утверждение, что инерциальные системы отсчета существуют, составляет содержание первого закона классической механики - *закона инерции Галилея - Ньютона* - таково: *существуют системы отсчета, называемые инерциальными, в которых при отсутствии воздействия других тел частица сохраняет стационарное состояние движения: движется равномерно и прямолинейно (в частном случае - покоится)*.

Инерциальной системой отсчета является *гелиоцентрическая система отсчета*, начало отсчета которой связана с Солнцем. Системы отсчета, движущиеся равномерно прямолинейно относительно инерциальной системы также являются инерциальными. Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальной системы, являются *неинерциальными*.

По этим причинам поверхность Земли, строго говоря, является неинерциальной системой отсчета. Однако, во многих задачах, систему отсчета, связанную с Землей, в первом приближении можно считать инерциальной.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы отсчета называются инерциальными? Почему эти системы очень удобны для описания механических движений?
2. Какими факторами определяется значение ускорения в инерциальных системах отсчета?
3. Можно ли считать систему отсчета, связанную с Землей инерциальной?
4. Сформулируйте первый закон Ньютона.

§2.2. Основные законы динамики в инерциальных системах отсчета

Способность тела сохранять состояние равномерного прямолинейного движения или покоя в инерциальных системах отсчета, называется *инертностью тела*. Мерой инертности тела является *масса*. Масса величина скалярная, в системе СИ измеряется в килограммах (кг).

Мерой взаимодействия является величина, называемой *силой*. Сила – величина векторная, в системе СИ измеряется в Ньютонах (Н).

Второй закон Ньютона. В инерциальных системах материальная точка движется с ускорением, если сумма всех сил, действующих на нее не равна нулю, причем произведение массы точки на ее ускорение равно сумме этих сил, т.е.:

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i} \quad . \tag{2.1}$$

Поскольку масса точки величина положительная, то ее вектор ускорения всегда направлен по сумме всех сил, действующих на нее, т.е. $\vec{a} \uparrow\uparrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.

При решении задач с применением второго закона Ньютона важно помнить следующее:

- если точка движется по прямой линии, то ее вектор ускорения направлен по движению при ускоренном характере движения, для замедленного характера движения — против движения;
- если точка движется по окружности ускоренно, то вектор тангенциального ускорения направлен по вектору линейной скорости, при замедленном характере движения — наоборот. Вектор нормального ускорения направлен к центру вращения.

Третий закон Ньютона. Силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению, т.е.: $\boxed{\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}}$.

Следует запомнить, что силы, как меры взаимодействия, всегда рождаются парами.

Если тело совершает поступательное движение[*], то векторы сил, действующих на него, переносят в центр масс этого тела. Это позволяет свести задачу к движению одной материальной точки твердого тела.

Для успешного решения большинства задач с использованием законов Ньютона, необходимо придерживаться некоторой последовательности действий (своего рода алгоритма).

Основные пункты алгоритма.

1. Проанализировать условие задачи и выяснить, с какими телами взаимодействует рассматриваемая материальная точка. Исходя из этого, определить количество сил, действующих на нее. (Допустим, число сил, действующих на тело, равно $\mathbf{n}$.) Затем выполнить схематически правильный рисунок, на котором построить все силы, действующие на точку.

2. Используя условие задачи, определить направление ускорения рассматриваемой точки, и изобразить вектор ускорения на рисунке.

3. Записать в векторной форме второй закон Ньютона, т.е.:

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad , \tag{2.2}$$

где $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{F}}_n$ – силы, действующие на точку.

4. Выбрать инерциальную систему отсчета. Изобразить на рисунке прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой обычно направляют по вектору ускорения, ось OY и OZ направить перпендикулярно оси OX.

5. Воспользовавшись основным свойством векторных равенств, записать второй закон Ньютона для проекций векторов на оси координат, т.е.:

$$\begin{aligned}
\mathbf{OX:}\quad & \mathbf{m \cdot a_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}}\ ;\\
\mathbf{OY:}\quad & \mathbf{0 = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}}\ ;\\
\mathbf{OZ:}\quad & \mathbf{0 = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}}\ .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

6. Если в задаче кроме сил и ускорений требуется определить координаты и скорость, то кроме второго закона Ньютона необходимо использовать и кинематические уравнения движения. Записав систему уравнений, необходимо обратить внимание на то, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных в данной задаче.

7. Далее необходимо решить систему уравнений и найти соотношения для величин, которые требуется определить в данной задаче. И только потом в полученные формулы подставить цифровые данные.

[*] Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

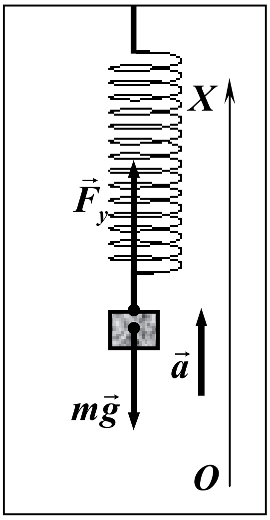
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение силы. В каких единицах в системе СИ измеряется величина силы?
2. Что такое свойство инертности тела? Какая физическая величина является мерой инертности тела? В каких единицах в системе СИ измеряется масса тел?
3. Дайте формулировку второго закона Ньютона для инерциальных систем отсчета.
4. Дайте формулировку третьего закона Ньютона.

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 1. *В кабине лифта на динамометре висит груз массой* $\boldsymbol{m = 2}$ ***кг***. *Динамометр показывает силу* $\boldsymbol{F_y = 30}$ ***Н***. *Определить ускорение груза. Можно ли ответить на вопрос, в каком направлении движется груз?*

Решение. *На тело, движущееся с ускорением* $\vec{a}$, *действуют два тела: Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$ *и пружина с силой* $\vec{F}_y$. *Изобразим силы на рисунке. Предположим, что*



вектор ускорения лифта направлен вверх. Изобразим вектор $\vec{a}$ *на рисунке. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме:*

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_y + m \cdot \vec{g}.$$

Выбираем ось OX по направлению ускорения. Записываем второй закон Ньютона для проекций векторов на эту ось:

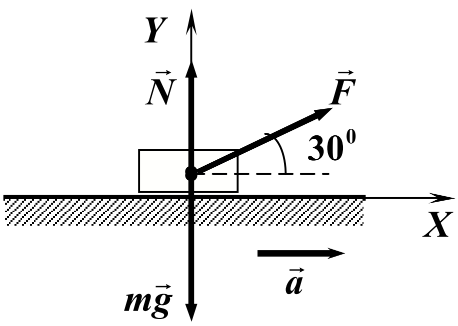
$$OX: \quad m \cdot a_x = F_y - m \cdot g.$$

Из данного равенства находим проекцию ускорения на ось OX:

$$a_x = \frac{F_y - m \cdot g}{m} = \frac{30 - 2 \cdot 10}{2} = 5\ м/с^2.$$

Так как проекция ускорения на ось OX положительная, то предположение о том, что вектор ускорения лифта направлен вертикально вверх, соответствует действительности. Определить направление движения лифта не представляется возможным, так как указанному направлению вектора ускорения соответствует два типа движения: а) равноускоренное движение вертикально вверх; б) равнозамедленное движение вертикально вниз.

Пример 2. *На идеально гладкой горизонтальной поверхности под действием силы*



$\boldsymbol{F = 10}$ ***Н***, *направленной под углом* $\alpha = 30^0$ *к горизонту (см. рис.), движется тело массой* $\boldsymbol{m = 2}$ ***кг***. *Определить величину вектора ускорения тела и величину силы, с которой тело действует на горизонтальную поверхность.*

Решение. *На тело, движущееся с ускорением* $\vec{a}$, *действуют три тела: Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$, *горизонтальная поверхность с силой реакции* $\vec{N}$ *и некоторое тело с силой тяги* $\vec{F}$. *Изобразим силы на рисунке. Движение тела в данной за-*

даче равноускоренно вдоль горизонтальной поверхности. Вектор ускорения направлен по движению тела. Изобразим вектор $\vec{a}$ *на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:*

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m \cdot \vec{g}.$$

Выбирем ось OX по ускорению, ось OY направляем вверх перпендикулярно оси OX. Записываем второй закон Ньютона для проекций векторов на эти оси:

$$OX: \quad m \cdot a = F_x + N_x + mg_x = F \cdot \cos 30^0 + 0 + 0 \Rightarrow m \cdot a = F \cdot \cos 30^0 ;$$

$$OY: \quad 0 = F_y + N_y + mg_y = F \cdot \sin 30^0 + N - m \cdot g \Rightarrow 0 = F \cdot \sin 30^0 + N - m \cdot g .$$

Из первого уравнения находим величину вектора ускорения:

$$a = \frac{F \cdot \cos 30^0}{m} = \frac{10 \cdot \cos 30^0}{2} = 4{,}33\ м/с^2 .$$

Из второго уравнения выражаем величину вектора силы, с которой горизонтальная поверхность действует на тело:

$$N = m \cdot g - F \cdot \sin 30^0 = 2 \cdot 10 - 10 \cdot \sin 30^0 = 15\ H .$$

По третьему закону Ньютона сила, с которой тело действует на горизонтальную поверхность, численно равна силе, с которой горизонтальная поверхность действует на тело, т.е. $N' = N$. *Направление векторов этих сил противоположно.*

§2.3. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции*.

Рассмотрим неинерциальную систему отсчета K', вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью $\vec{V}_0$ относительно инерциальной K – системы.

В этом случае ускорение точки в инерциальной системе ($\vec{a}$) связано с ускорением в неинерциальной системе ($\vec{a}'$) соотношением (см §1.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \cdot \left(\vec{V}' \times \vec{\omega}\right) - \omega^2 \cdot \vec{\rho}, \tag{2.4}$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение неинерциальной системы K' относительно инерциальной системы K, $\vec{V}'$ – линейная скорость точки в неинерциальной системе.

Из последнего соотношения вместо ускорения $\vec{a}$ подставим в равенство (1), получим выражение:

$$\boxed{m \cdot \vec{a}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i - m \cdot \vec{a}_0 - 2 \cdot m \cdot \left(\vec{V}' \times \vec{\omega}\right) - m \cdot \omega^2 \cdot \vec{\rho}}. \tag{2.5}$$

Это соотношение является *вторым законом Ньютона для неинерциальной системы отсчета.*

---

* Материал для дополнительного изучения.

<u>Силы инерции.</u> Введем условные обозначения:

1. $\boxed{\vec{F}^*_{П} = -m \cdot \vec{a}_0}$ – *поступательная сила инерции*;
2. $\boxed{\vec{F}^*_{КОР} = -2 \cdot m \cdot \left(\vec{V}' \times \vec{\omega}\right)}$ – *сила Кориолиса*;
3. $\boxed{\vec{F}^*_{Ц} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{\rho}}$ – *центробежная сила инерции.*

В задачах поступательная сила инерции изображается против вектора ускорения поступательного движения неинерциальной системы отсчета ($\vec{a}_0$), центробежная сила инерции — от центра вращения по радиусу ($\vec{\rho}$); направление силы Кориолиса определяется по правилу *буравчика* для векторного произведения векторов $\left(\vec{V}' \times \vec{\omega}\right)$.

Строго говоря, силы инерции не являются в полном смысле, силами, т.к. для них не выполняется третий закон Ньютона, т.е. они не являются парными и возникают только при переходе от инерциальных систем отсчета к неинерциальным системам.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы отсчета называются неинерциальными? Приведите пример неинерциальных систем отчета.
2. Какие типы ускорений возникают при переходе от инерциальной системы отсчета к неинерциальной, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью $\vec{V}_0$ относительно инерциальной системы?
3. Дайте формулировку второго закона Ньютона для неинерциальных систем отсчета? Приведите пример сил инерции.
4. Куда направлены векторы поступательной силы инерции, силы Кориолиса и центробежной силы?
5. Являются ли силы инерции парными? Выполняется ли третий закон Ньютона для сил инерции?

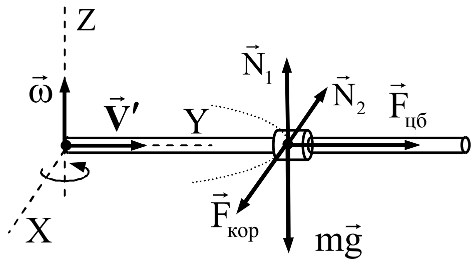
<u>*Примеры решения задач*</u>

***Пример 3**.** *Небольшая муфта массой m свободно скользит по гладкому горизонтальному стержню, который вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Найти горизонтальную составляющую силы, действующей на муфту со стороны стержня в момент, когда она находится на расстоянии r от оси вращения. (В начальный момент муфта находилась непосредственно около оси и имела пренебрежимо малую скорость).*

---

*Задача повышенной сложности.

Решение. *Для решения задачи выберем неинерциальную систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, и совместим ее с осью вращения. В этой системе отсчета на муфту действуют силы, являющиеся мерами взаимодействия: $\boldsymbol{m\vec{g}}$ – сила тяжести, $\vec{\boldsymbol{N}}_1$ – вертикальная сила реакции, $\vec{\boldsymbol{N}}_2$ – горизонтальная сила реакции. И, кроме того, в неинерциальной системе на муфту дополнительно действуют, так называемые силы инерции: $\vec{\boldsymbol{F}}_ц$ – центробежная сила, $\vec{\boldsymbol{F}}_{кор}$ – сила Кориолиса.*



Изобразим эти силы на рисунке. Искомой силой в данном случае является горизонтальная сила реакции $\vec{\boldsymbol{N}}_2$.

В рассматриваемой системе отсчета движение муфты является прямолинейным со скоростью $\vec{\mathbf{V}}'$ и ускорением $\vec{\boldsymbol{a}}'$. Запишем второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета:

$$m \cdot \vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_ц + \vec{F}_{кор}.$$

Спроектируем это равенство на оси OX и OY, получим соотношения:

$$OX: \quad 0 = F_{кор} - \mathrm{N}_1;$$
$$OY: \quad m \cdot a' = F_{цб}.$$

Учтем, что $\boldsymbol{a' = \dfrac{dV'}{dt}}$ *и* $\boldsymbol{F_{цб} = m \cdot \omega^2 \cdot r}$ *и, подставив в последнее равенство, получим соотношение:*

$$m \cdot \frac{dV'}{dt} = m \cdot \omega^2 \cdot r \Rightarrow \frac{dV'}{dt} = \omega^2 \cdot r.$$

Из соотношения $\boldsymbol{V' = \dfrac{dr}{dt}}$ *находим* $\boldsymbol{dt}$, *и, подставив в последнее соотношение, получим выражение:*

$$V' \cdot dV' = \omega^2 \cdot r \cdot dr \Rightarrow \int_0^{V'} V' \cdot dV' = \int_0^{r} \omega^2 \cdot r \cdot dr \Rightarrow V'^2 = \omega^2 \cdot r^2 \Rightarrow V' = \omega \cdot r.$$

Проектируем второй закон на ось OX и находим величину силы $\mathbf{N}_2$

$$N_2 = F_{кор} = 2 \cdot m \cdot V' \cdot \omega \cdot \sin 90^0 = 2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r.$$

§2.4. Силы в механике

В механике рассматривают одну бесконтактную дальнодействующую силу – *силу всемирного тяготения*, которая может действовать на рассматриваемое тело на большом расстоянии (например, Земля притягивает Луну), и пять контактных сил: *силу упругости*, *силу реакции, вес тела, силу упругости, силу трения и силу сопротивления*.

§2.5. Сила всемирного тяготения. Сила тяжести. Ускорение свободного падения.

Сила всемирного тяготения возникает в процессе взаимодействия между телами, обладающими массами, и вычисляется из соотношения:

$$\boxed{\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{12}\right| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}. \tag{2.6}$$

Коэффициент пропорциональности $\mathbf{G}$ получил название *гравитационной постоянной*. Его величина в системе СИ равна $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$.

Силы взаимного притяжения направлены вдоль одной прямой, соединяющей эти материальные точки. Закон всемирного тяготения справедлив для тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если размеры тел сравнимы с расстоянием между ними, то, для вычисления силы взаимодействия между ними, поступают следующим образом.

Каждое из тел разбивают на бесконечно малые части, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. Далее вычисляют силы взаимодействия каждой части одного тела с каждой частью другого тела. Полная сила взаимного притяжения равна сумме сил, действующих со стороны всех элементов одного тела на все элементы другого тела.

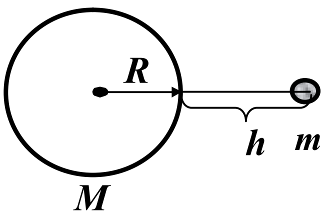


Рис. 2.1.

Проведя такие рассуждения для однородных шаров, можно показать, что результирующая сила притяжения вычисляется по формуле, приведенной ранее. В этом случае, берется масса шаров, а в качестве расстояния берется расстояние между центрами шаров.

Для тела, взаимодействующего с планетой, в качестве расстояния берется расстояние от центра планеты до центра масс тела. Приведем формулу для силы притяжения тел к планетам:

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}}. \tag{2.7}$$

Обычно, силу притяжения тела к планете называют силой тяжести, величину которой принято вычислять по формуле $\mathbf{m}|\vec{\mathbf{g}}|$, где $\mathbf{m}$ – масса тела, $|\vec{\mathbf{g}}|$ – модуль вектора ускорения свободного падения. Сила тяжести направлена к центру Земли, приложена к центру тяжести тела.

Соотношение (2.7), позволяет установить связь величины ускорения свободного падения с массой планеты, ее радиусом и высотой от рассматриваемой точки до поверхности планеты:

$$m \cdot |\vec{g}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow |\vec{g}| = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (2.8)$$

На поверхности планеты, т.е. когда $\mathbf{h = 0}$, для ускорения свободного падения справедлива формула

$$\boxed{|\vec{g}| = G \cdot \frac{M}{R^2}}. \qquad (2.9)$$

Вопросы для самоконтроля

1. По какому соотношению вычисляется величина силы всемирного тяготения?
2. Дайте определение силы тяжести.
3. Отчего зависит ускорение свободного падения тел?

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 4. *Ракета поднялась на высоту* $\mathbf{h = 990}$ *км. На сколько уменьшилась сила тяжести, действующая на ракету на заданной высоте, по сравнению с силой тяжести, действующей на нее на поверхности Земли? Масса ракеты на поверхности Земли равна* $\mathbf{m = 500}$ *кг. Изменением массы ракеты при полете пренебречь.*

Решение. *Запишем формулу для вычисления силы тяжести ракеты на заданной высоте:*

$$F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}.$$

Запишем формулу для вычисления силы тяжести ракеты на поверхности Земли в следующем виде:

$$F_2 = m \cdot g.$$

Найдем уравнение для изменения силы тяжести, действующей на ракету:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = m \cdot g - G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}.$$

Подставим в последнее соотношение числовые данные, найдем величину изменения силы тяжести

$$\Delta F = 500 \cdot 9{,}81 - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}4 \cdot 10^{6} + 0{,}99 \cdot 10^{6})^2} = 1250\ H.$$

Пример 5. *Небольшой спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте* $\boldsymbol{h}$ *над поверхностью. Вычислить величину его линейной скорости.*

Решение. *На спутник, движущийся вокруг Земли, действует единственная сила — сила всемирного тяготения* $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$. *Пусть траекторией его движения является окружность. В этом случае спутник движется равномерно по окружности.*

Изобразим вектор его скорости на рисунке. Вектор центростремительного ускорения $\vec{\boldsymbol{a}}_{ц}$ *и сила всемирного тяготения лежат в плоскости траектории, поэтому данная задача является исключением из рекомендаций, изложенных ранее. Изобразим векторы ускорения* $\vec{\boldsymbol{a}}_{ц}$ *и силы* $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$ *на рисунке.*

Обозначим через $\boldsymbol{R_З}$ – *радиус Земли;* $\boldsymbol{h}$ – *высоту, на которой находится спутник над поверхностью Земли.*

Запишем второй закон Ньютона для спутника:

$$\boldsymbol{m \cdot \vec{a}_{ц} = \vec{F}_{m}}.$$

Спроектировав данное векторное равенство на ось OX, получим равенство:

$$\boldsymbol{m \cdot a_{ц} = F_{m}}.$$

Для величины силы $\mathbf{F_т}$ *и центростремительного ускорения* $\mathbf{a_ц}$ *имеем равенства:*

$$\boldsymbol{a_{ц} = \frac{V^2}{R_З + h}}, \qquad \boldsymbol{F_{m} = G \cdot \frac{m \cdot M_З}{(R_З + h)^2}},$$

где $\boldsymbol{m}$ – *масса спутника;* $\boldsymbol{M_З}$ – *масса Земли;* $\boldsymbol{G}$ – *гравитационная постоянная.*

С учетом этих соотношений равенство (2.11) примет вид:

$$\boldsymbol{m \cdot \frac{V^2}{R_З + h} = G \cdot \frac{m \cdot M_З}{(R_З + h)^2} \Rightarrow V^2 = G \cdot \frac{M_З}{R_З + h} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow V = \sqrt{G \cdot \frac{M_З}{R_З + h}}}.$$

Из последнего равенства видно, что первая космическая скорость спутника зависит от радиуса планеты, ее массы и высоты спутника над поверхностью планеты. Для спутников, вращающихся на малых высотах ($\mathbf{h = 0}$*) справедлива следующая формула:*

$$\boldsymbol{V_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M_З}{R_З}}}.$$

Выразим первую космическую скорость спутника, вращающегося на малой высоте, через ускорение свободного падения на поверхности Земли $\mathbf{g_0}$*:*

$$\boldsymbol{V_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M_З}{R_З^2} \cdot R_З} = \sqrt{g_0 \cdot R_З}}.$$

§2.6. Сила реакции. Вес тела.

Силы реакции возникают при взаимодействии тела с различными конструкциями, ограничивающими его положение в пространстве. Например, на тело, подвешенное на нити, действует сила реакции, называемая обычно силой *натяжения. Сила натяжения нити направлена всегда вдоль нити.* Формулы для вычисления ее величины нет. Обычно величину ее находят либо из первого, либо из второго закона Ньютона.

К силам реакции также относят силы, действующие на частицу на гладкой поверхности. Ее называют *нормальной силой реакции*, обозначают $\vec{\mathbf{N}}$. *Сила реакции всегда направлена перпендикулярно рассматриваемой поверхности*. Со стороны тела на гладкую поверхность действует сила, называемая *силой нормального давления* ($\vec{\mathbf{N}}'$). По третьему закону Ньютона, сила реакции равна по величине силе нормального давления, но векторы этих сил противоположны по направлению.

Вес тела – это сила, с которой тело, вследствие притяжения Земли, давит на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес.

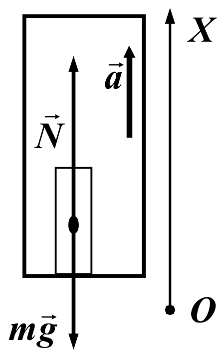
Если весы движутся с ускорением, то вес может быть и больше, и меньше силы тяжести.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие силы принято называть силами реакций?
2. Дайте определение веса тела.
3. В каких случаях вес тела и сила тяжести совпадают?

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 6. *Определить вес мальчика массой* $\boldsymbol{m = 50}$ ***кг*** *в лифте, движущемся вертикально вверх с ускорением* $\boldsymbol{a = 2}$ ***м/с²***. *Во сколько раз вес мальчика отличается от силы тяжести?*



Решение. *На мальчика в лифте действуют два тела: а) Земля с силой тяжести* $\boldsymbol{m\vec{g}}$; *б) пол лифта с силой реакции* $\vec{N}$. *Изобразим эти силы на рисунке. Покажем на этом рисунке направление вектора ускорения лифта. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:*

$$\boldsymbol{m \cdot \vec{a} = \vec{N} + m \cdot \vec{g}}.$$

В качестве инерциальной системы отсчета выбираем поверхность Земли, ось ОХ направим по вектору ускорения лифта. Запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$\boldsymbol{m \cdot a_x = N_x + m \cdot g_x};$$
$$\boldsymbol{(a_x = a, \quad N_x = N, \quad g_x = -g) \Rightarrow}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow m \cdot a = N - m \cdot g}.$$

Из данного уравнения находим величину силы реакции:

$$N = m \cdot g + m \cdot a.$$

Подставляя цифровые данные в системе СИ, находим силу реакции:

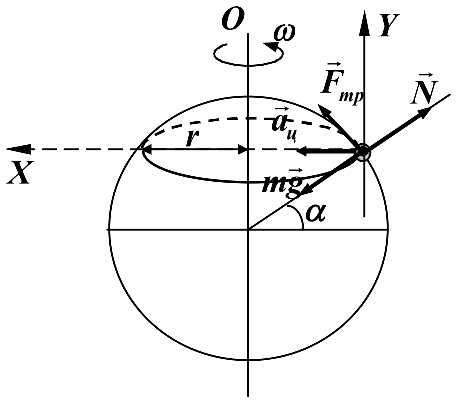
$$N = 50 \cdot 9{,}81 + 50 \cdot 2 = 591\ H.$$

По определению, вес численно равен силе реакции, т.е. $N' = N = 591\,H$.

Найдем, во сколько раз отличается вес от силы тяжести мальчика:

$$\frac{N'}{m \cdot g} = \frac{591}{50 \cdot 9{,}81} = 1{,}2.$$

Пример 7. *Тело находится на поверхности Земли. Найдите зависимость веса этого тела от географической широты местности.*



Решение. *Рассмотрим движение тела, расположенного на поверхности Земли. Обозначим широту местности (угол между проведенной через центр Земли и плоскостью экватора) через* α.

На данное тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$*, направленная к центру Земли; сила реакции опоры* $\vec{N}$*, направленная перпендикулярно горизонтальной поверхности; сила трения покоя* $\vec{F}_{тр}$*. Вектор силы трения направлен на северный полюс Земли.*

Изобразим данные силы и вектор центростремительного ускорения на рисунке. Обозначим $R_З$ *— радиус Земли;* r *— радиус вращения тела.*

Запишем второй закон Ньютона:

$$m \cdot \vec{a}_ц = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Возьмем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по центростремительному ускорению, а ось OY — по вектору силы реакции. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на данные оси:

$$OX: \quad m \cdot a_ц = m \cdot g \cdot \cos\alpha - N \cdot \cos\alpha + F_{тр} \cdot \sin\alpha; \tag{1}$$

$$OY: \quad 0 = -m \cdot g \cdot \sin\alpha + N \cdot \sin\alpha + F_{тр} \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Разделив обе части равенства (1) на $\sin\alpha$*, а обе части равенства (2) — на* $\cos\alpha$*, получим систему уравнений:*

$$\frac{m \cdot a_ц}{\sin\alpha} = m \cdot g \cdot ctg\,\alpha - N \cdot ctg\,\alpha + F_{тр}, \tag{3}$$

$$0 = -m \cdot g \cdot tg\,\alpha + N \cdot tg\,\alpha + F_{тр}. \tag{4}$$

Вычтя из левой части равенства (3) левую часть равенства (4), а из правой части равенства (3) — правую часть равенства (4), получим уравнение:

$$\frac{m \cdot a_ц}{\sin\alpha} = m \cdot g \cdot ctg\,\alpha + m \cdot g \cdot tg\,\alpha - N \cdot ctg\,\alpha - N \cdot tg\,\alpha.$$

Откуда находим величину силы реакции покоя, действующей на тело:

$$\frac{m \cdot a_ц}{\sin\alpha} = m \cdot g \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} - N \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \Rightarrow$$

$$N - m \cdot g = -m \cdot a_ц \cdot \cos\alpha \Rightarrow N = m \cdot g - m \cdot a_ц \cdot \cos\alpha \ .$$

Так как вес численно равен силе реакции, для веса тела в данном случае имеем следующее равенство:

$$P = m \cdot \left(g - a_ц \cdot \cos\alpha\right).$$

Из данного равенства видно, что вес тела зависит от широты местности α, на которой расположено тело. Кроме того, вес тела достигает максимального значения при $\alpha = 90^0$, т.е. на полюсе Земли, а минимальное значение веса достигается при $\alpha = 0^0$, т.е. на экваторе. На полюсе вес тела численно равен силе тяжести $m \cdot g$.

§2.7. Сила упругости.

Силы упругости возникают в телах в том случае, если тела деформированы, т.е. если изменена форма тела или его объем. При прекращении деформации силы упругости исчезают. Следует заметить, что, хотя силы упругости возникают при деформациях тел, не всегда деформация приводит к возникновению сил упругости.

Силы упругости возникают в телах, способных восстанавливать свою форму после прекращения внешнего воздействия. Такие тела, и соответствующие им деформации, называются *упругими*. При *пластической* деформации изменения полностью не исчезают после прекращения внешнего воздействия.

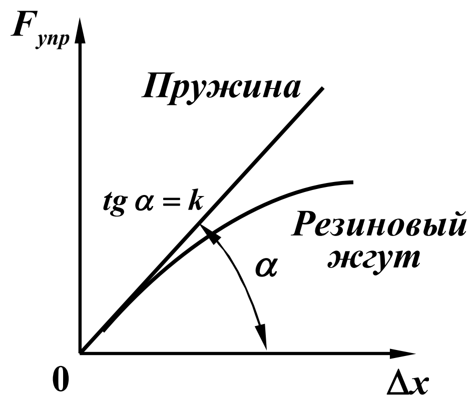


Рис. 2.2.

Ярким примером проявления сил упругости могут служить силы, возникающие в пружинах, подверженных деформации. *Для упругих деформаций, возникающих в деформированных телах, сила упругости всегда пропорциональна величине деформации, т.е.:*

$$\vec{F}_{упр} = -k \cdot \Delta\vec{x}\,, \tag{2.10}$$

где k – коэффициент упругости (или жесткости) пружины, $\Delta\vec{x}$ – вектор деформации пружины.

Данное утверждение получило название *закона Гука.*

Чем больше жесткость тела, тем меньше оно деформируется при заданной силе. Величина k определяется геометрическими размерами тела и материалом, из которого оно изготовлено. Если форма тела (стержня, пружины или резинового жгута) начинает существенно меняться, то пропорциональность между $F_{упр}$ и Δx нарушается (см. рис. 2.2).

Сила упругости направлена вдоль нити, стержня или пружины. Сила приложена в точке контакта.

Нить – модель тела с нулевой массой и с выделенной осью, которое способно изгибаться под бесконечно малой нагрузкой. Поэтому, ее можно перебросить через блок, и сила натяжения будет везде одинакова.

Пружина – модель тела (обычно с нулевой массой), которое действует на рассматриваемое тело не только в растянутом, но и в сжатом состоянии. Причем закон Гука выполняется для пружины не только при растяжении, но и при сжатии.

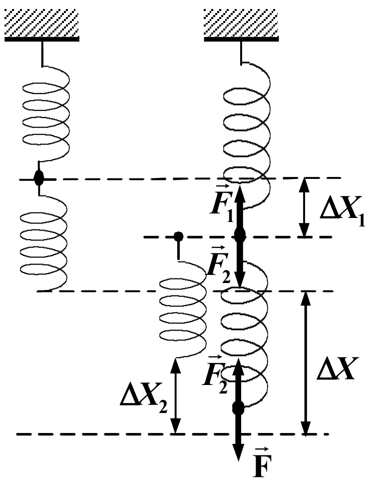
Вопросы для самоконтроля

1. Какие силы принято называть силами упругости?
2. Какие деформации называются упругими, а какие пластическими?
3. Сформулируйте закон Гука и укажите границы применимости закона Гука.

Примеры решения задач

Пример 8. *Жесткость одной пружины равна k_1, а другой k_2. Какова жесткость пружины k, составленной из этих пружин, соединенных последовательно?*

Решение. *На рисунке слева изображены две пружины, соединенные последовательно. Под действием силы $\vec{F}$ пружины удлиняются. При этом общее удлинение последовательно соединенных пружин ΔX равно сумме удлинений каждой пружины, т.е.:*



$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2.$$

В положении равновесия, т.е. когда пружины находятся в состоянии покоя, величина силы $\vec{F}$ равна величине силы $\vec{F}_2$, т.е. $|\vec{F}| = |\vec{F}_2|$. Точка, в которой соединяются пружины, также находится в состоянии покоя. Исходя из первого закона Ньютона, имеем равенство $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$. Запишем закон Гука для рассматриваемых сил:

$$|\vec{F}| = k \cdot \Delta X, \qquad |\vec{F}_1| = k_1 \cdot \Delta X_1, \qquad |\vec{F}_2| = k_2 \cdot \Delta X_2.$$

Из последних равенств находим величины деформаций ΔX, ΔX_1 и ΔX_2, и, подставив в равенство (1), получим равенство:

$$\frac{|\vec{F}|}{k} = \frac{|\vec{F}_1|}{k_1} + \frac{|\vec{F}_2|}{k_2}.$$

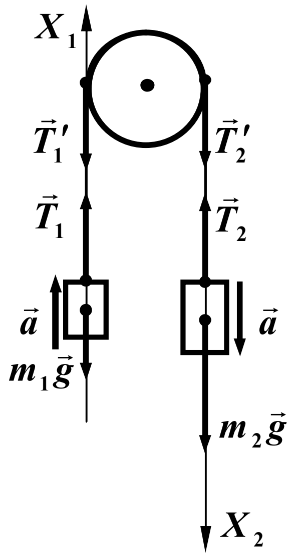
Учтем, что величины всех сил, входящих в последнее соотношение одинаковы. Разделив обе части полученного равенства на величину силы $|\vec{F}|$, получим окончательное соотношение для вычисления общего коэффициента жесткости последовательно соединенных пружин:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Пример 9. *Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. На одном конце нити находится тело массой* $\boldsymbol{m_1 = 1\ кг}$*, на другом — тело массой* $\boldsymbol{m_2 = 2\ кг}$*. Определить величину силы натяжения нити и величину ускорения тел.*

Решение. *Изобразим все силы, действующие на тела и на блок. Рассмотрим процесс движения тел, связанных нитью, перекинутой через блок. Нить является невесомой и нерастяжимой, следовательно, величина силы натяжения на любом участке нити будет одинаковой, т.е.* $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1'\right|$ *и* $\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right|$.

Перемещения тел за любые промежутки времени будут одинаковыми, и, следовательно, в любой момент времени одинаковыми будут величины скоростей и ускорений этих тел.



Из того, что блок вращается без трения и является невесомым, следует, что сила натяжения нити по обе стороны блока будет одинаковой, т.е.: $\left|\vec{T}_1'\right| = \left|\vec{T}_2'\right|$.

Отсюда вытекает равенство сил натяжения нити, действующей на первое и второе тело, т.е. $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right|$.

Изобразим на рисунке векторы ускорений первого и второго тела. Изобразим две оси ОХ. Первую ось направим вдоль вектора ускорения первого тела, вторую — вдоль вектора ускорения второго тела.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на эти оси координат:

$$OX_1: \quad T_1 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a; \tag{1}$$

$$OX_2: \quad m_2 \cdot g - T_2 = m_2 \cdot a. \tag{2}$$

Учитывая, что $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right|$*, и выразив из первого уравнения* T_1*, подставим* T_1 *во второе уравнение, получим*

$$m_2 \cdot g - (m_1 \cdot g + m_1 \cdot a) = m_2 \cdot a \Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = (m_2 - m_1) \cdot g \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Из последнего равенства находим величину ускорения:

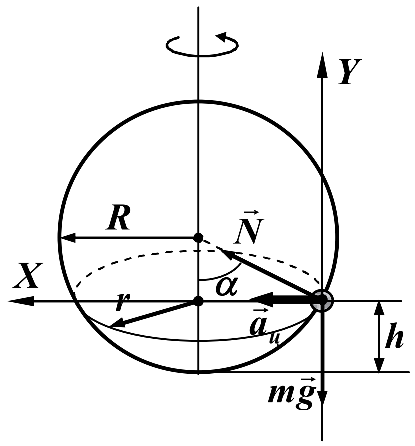
$$\mathrm{a} = \frac{2-1}{2+1} \cdot 9{,}8 \approx 3{,}27\ \mathrm{м/c^2}.$$

Из равенства (1) находим величину силы натяжения:

$$T = m_1 \cdot (g + a) = 1 \cdot (9{,}8 + 3{,}27) \approx 13{,}1\ H.$$

Пример 10. *Маленькое колечко массой* $m = 10$ *г надето на большое проволочное кольцо радиуса* $R = 0{,}5$ *м, расположенное в вертикальной плоскости. Большое кольцо вращается вокруг вертикальной оси с частотой* $\nu = 1$ *Гц. Колечко начинает скользить вниз из верхней точки большого кольца. На какую высоту опустится колечко?*

Решение. *На маленькое колечко при его вращении по окружности действуют две силы: сила тяжести* $m\vec{g}$*, направленная вертикально вниз, и сила реакции* $\vec{N}$*, направленная к центру кольца. Изобразим эти силы на рисунке, а также покажем на нем траекторию движения колечка.*



Вектор центростремительного ускорения $\vec{a}_ц$ *колечка лежит в плоскости траектории и направлен к оси вращения. Изобразим* $\vec{a}_ц$ *на рисунке.*

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для вращающегося колечка:

$$m \cdot \vec{a}_ц = \vec{N} + m\vec{g}.$$

Выберем прямоугольную систему координат, ось OX которой направим по центростремительному ускорению $\vec{a}_ц$*, а ось OY — вертикально вверх вдоль оси вращения. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси координат:*

$$OX: \quad m \cdot a_ц = N \cdot \sin\alpha; \qquad (1)$$

$$OY: \quad 0 = N \cdot \cos\alpha - m \cdot g. \qquad (2)$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции $\mathbf{N}$ *и подставляем в равенство (1), получим выражение:*

$$m \cdot a_ц = m \cdot g \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow a_ц = g \cdot tg\,\alpha. \qquad (3)$$

Центростремительное ускорение связано с частотой вращения соотношением: $a_ц = 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$*, где* r *– радиус вращения маленького колечка. Подставим правую часть последнего равенства вместо* $a_ц$ *в формулу (3), получим следующее соотношение:*

$$4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r = g \cdot tg\,\alpha. \qquad (4)$$

Из рисунка находим величину тангенса угла альфа $\mathbf{tg}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{R - h}}$*. С учетом этого выражения равенство (4) примет вид:*

$$4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r = g \cdot \frac{r}{R-h} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 = \frac{g}{R-h}.$$

Из последнего уравнения находим искомую высоту $\mathbf{h}$*:*

$$h = R - \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2} = 0{,}5 - \frac{9{,}81}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1^2} = 0{,}252 \text{ м}.$$

§2.8. Сила трения. Закон сухого трения

При соприкосновении тел, между ними наблюдается взаимодействие. Силу, характеризующую это взаимодействие, называют силой реакции поверхности, обозначают $\vec{R}$, и представляют в виде суммы сил, составляющих ее: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$, где $\vec{N}$ – *сила нормальной реакции поверхности*, направленная перпендикулярно этой поверхности, $\vec{F}_{тр}$ – *сила трения*, направленная вдоль этой поверхности.

При контакте гладких поверхностей $F_{тр} = 0$ и $\vec{R} = \vec{N}$. Простейшее соотношение между модулями сил, составляющих силу реакции поверхности, формулируется в виде закона сухого трения:

1. При скольжении модуль силы трения прямо пропорционален модулю силы нормальной реакции:

$$\boxed{F_{тр.ск} = \mu \cdot N}.$$

Коэффициент пропорциональности μ – *коэффициент трения скольжения* не зависит ни от площади соприкасающихся поверхностей, ни от скорости их относительного движения.

2. Если скольжение не происходит, то *максимально возможное значение* силы трения покоя равно значению силы трения скольжения:

$$\boxed{F_{тр.п} \le F_{тр.ск}}.$$

Значение и направление силы трения покоя определяется из условия неподвижности тела относительно опоры.

При постепенном увеличении (со временем) силы $\vec{F}$, приложенной вдоль трущихся поверхностей, происходит аналогичный рост силы трения покоя (рис. 2.3). Силы, действующие вдоль поверхности, скомпенсированы, поэтому тело покоится.

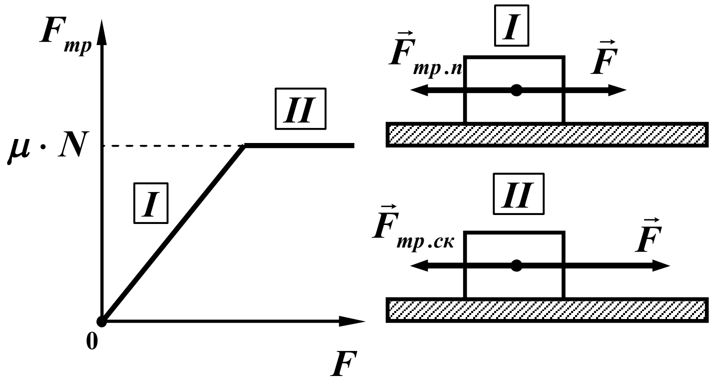


Рис 2.3

Когда модуль силы $\vec{F}$ достигнет значения $\mu \cdot N$, модуль силы трения покоя достигает своего максимального значения, а затем сила трения уже не уравновешивает внешнюю силу $\vec{F}$, и тело начинает скользить, разгоняясь (рис. 2.3).

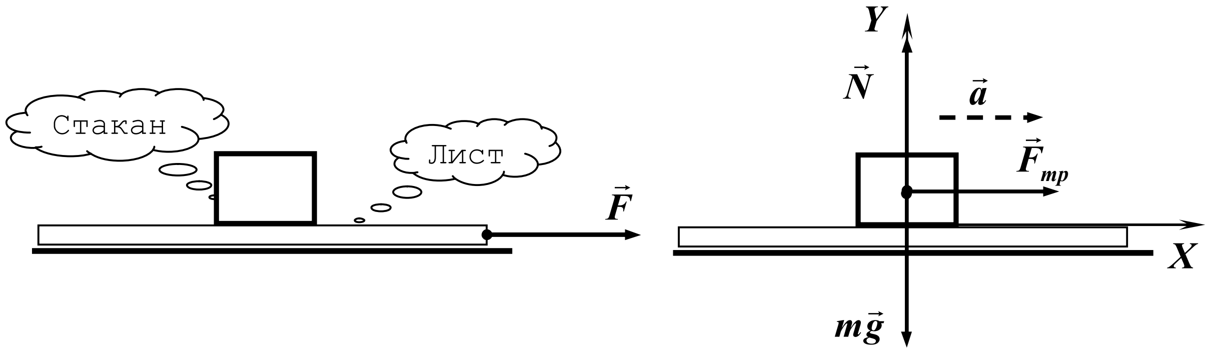
Вопросы для самоконтроля

1. Какими силами представлена сила реакции $\vec{R}$ поверхности?
2. Как можно рассчитать силу трения покоя? В каком случае сила трения покоя и сила трения скольжения одинаковы?
3. По какой формуле можно рассчитать силу трения скольжения?

Примеры решения задач

Пример 11. *На лист бумаги помещен стакан. С каким ускорением надо привести в движение лист, чтобы выдернуть его из-под стакана, если коэффициент трения между стаканом и листом бумаги равен* ***0,3****?*

Решение. *Предположим, что при некоторой силе* $\vec{F}$*, действующей на лист бумаги, стакан движется совместно с листом. Изобразим отдельно силы, действующие на стакан массой* m*. На стакан действуют следующие тела: Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$*, лист бумаги с силой реакции* $\vec{N}$*, лист бумаги с силой трения* $\vec{F}_{тр}$*, направленной по скорости движения стакана.*



Движение стакана является равноускоренным, следовательно, вектор ускорения направлен по скорости движения стакана. Изобразим вектор ускорения стакана $\vec{a}$ *на рисунке.*

Запишем второй закон Ньютона для сил, действующих на стакан:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N}.$$

Направим ось OX по вектору ускорения стакана, а ось OY — вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX: \quad m \cdot a = F_{тр}; \tag{1}$$

$$OY: \quad 0 = N - m \cdot g. \tag{2}$$

При увеличении силы $\vec{F}$*, действующей на лист бумаги, возрастает величина силы трения, с которой лист бумаги действует на стакан. При некотором значении силы* $\vec{F}$ *величина силы трения* $\vec{F}_{тр}$ *достигает своего максимального значения, равного по величине силе трения скольжения. С этого момента начинается скольжение стакана относительно поверхности бумаги. Предельное значение силы трения связано с силой реакции, действующей на стакан следующим соотношением:*

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

Из равенства (2) выражаем величину силы реакции, а затем подставляем в последнее соотношение, имеем $F_{тр} = \mu \cdot m \cdot g$. *Из полученного соотношения находим величину силы трения* $F_{тр}$ *и подставляем в равенство (1), получим выражение для определения максимального ускорения стакана:*

$$m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow a = \mu \cdot g.$$

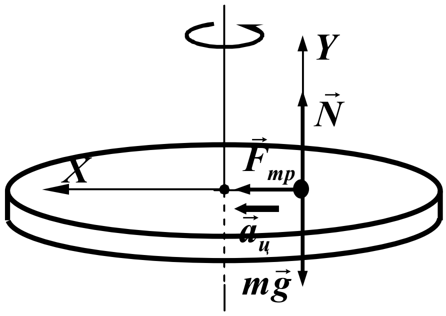
Подставив числовые значения величин в последнее равенство, найдем величину максимального ускорения стакана:

$$a = 0{,}3 \cdot 10 = 3\ м/с^2.$$

Полученная величина ускорения стакана равна минимальному ускорению листа бумаги, при котором его можно «выдернуть» из-под стакана.

Пример 12. *На каком расстоянии от центра горизонтального диска, вращающегося с частотой* $\nu = 2\ с^{-1}$, *нужно поместить небольшое тело, чтобы оно не соскальзывало с диска, если коэффициент трения между диском и телом равен* $\mu = 0{,}2$*?*

Решение. *На тело, вращающееся вместе с диском, действуют три силы: сила тяжести* $m\vec{g}$, *сила реакции* $\vec{N}$ *и сила трения* $\vec{F}_{тр}$, *направленная к оси вращения. Изобразим все силы на рисунке. Покажем на данном рисунке направление вектора центростремительного ускорения* $\vec{a}_ц$. *Записываем второй закон Ньютона:*



$$m \cdot \vec{a}_ц = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$OX: \quad m \cdot a_ц = F_{тр}; \qquad (1)$$

$$OY: \quad 0 = -mg + N. \qquad (2)$$

Запишем соотношение для центростремительного ускорения:

$$a_ц = 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r. \qquad (3)$$

Подставим правую часть равенства (3) вместо центростремительного ускорения в равенство (1), получим:

$$F_{тр} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r. \qquad (4)$$

Из равенства (4) видно, что величина силы трения прямо пропорциональна радиусу вращения r, *поэтому при увеличении радиуса вращения сила трения покоя увеличивается, и при некоторой величине* r *сила трения покоя достигает максимального значения, равного силе трения скольжения (*$F_{тр} = \mu \cdot N$*). С учетом равенства (2), получим выражения для максимальной силы трения покоя:*

$$F_{тр} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Подставим правую часть полученного равенства вместо силы трения в равенство (4), получим следующее соотношение:

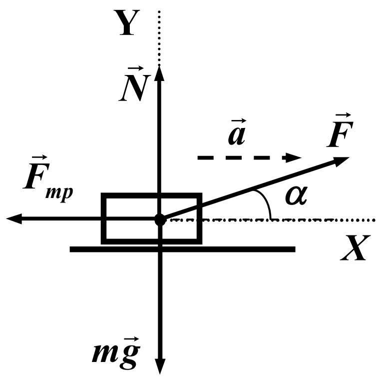
$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$$

Из данного уравнения находим предельное значение радиуса вращения:

$$r = \frac{\mu \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2^2} = 1{,}24 \cdot 10^{-2}\ м.$$

Пример 13. *На тело массой* $m = 20$ *кг действует сила* $F = 200$ *Н под углом* $\alpha = 30^0$ *к горизонту (см. рис.). Коэффициент трения между телом и горизонтальной поверхностью равен* $\mu = 0{,}2$. *Определить величину ускорения груза.*

Решение. *Изобразим все силы, действующие на тело. Кроме внешней силы* $\vec{F}$ *на тело действует Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$, *горизонтальная поверхность с силой реакции* $\vec{N}$ *и силой трения* $\vec{F}_{тр}$, *направленной против скорости движения тела.*



Тело движется равноускоренно, и, следовательно, вектор его ускорения направлен по скорости движения. Изобразим вектор $\vec{a}$ *на рисунке.*

Выбираем систему координат так, как показано на рисунке. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} \, .$$

Используя основное свойство векторных равенств, запишем уравнения для проекций векторов, входящих в последнее векторное равенство:

$$OX: \quad m \cdot a = F \cdot \cos\alpha - F_{тр} \, ; \qquad (1)$$

$$OY: \qquad 0 = N + F \cdot \sin\alpha - m \cdot g \, . \qquad (2)$$

Записываем соотношение для силы трения скольжения:

$$F_{тр} = \mu \cdot N \, . \qquad (3)$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции:

$$\mathrm{N} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} - \mathrm{F} \cdot \sin\alpha \, .$$

Из полученного выражения подставим в равенство (3) вместо величины силы реакции N, *получим выражение:*

$$F_{тр} = \mu\left(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha\right).$$

Подставив полученное выражение для силы трения в равенство (1), будем иметь формулу для вычисления ускорения тела:

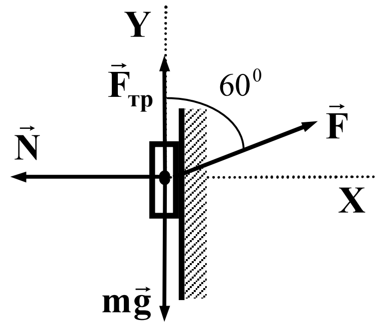
$$m \cdot a = F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot \left(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha\right) \Rightarrow a = \frac{F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot \left(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha\right)}{m} \, .$$

В последнюю формулу подставим числовые данные в системе СИ, найдем величину ускорения движения груза:

$$a = \frac{200 \cdot \cos 30^0 - 0{,}2 \cdot \left(20 \cdot 9{,}8 - 200 \cdot \sin 30^0\right)}{20} = 7{,}7 \; м/с^2 \, .$$

Пример 14. *К вертикальной стене прижимают брусок массой* $\boldsymbol{m=3}$ ***кг*** *с силой* $\boldsymbol{F}$ *так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между стеной и бруском равен* **0,2**. *Каково должно быть минимальное значение силы* $\boldsymbol{F}$, *чтобы брусок оставался в покое?*

Решение. *Для минимальной величины силы* $\vec{F}$ *определим направление силы трения, которая действует на покоящийся брусок. Представим, что сила* $\vec{F}$ *меньше той минимальной силы, достаточной для того, чтобы тело оставалось в покое. В этом случае тело будет двигаться вниз, и, сила трения* $\vec{F}_{тр}$, *приложенная к нему, будет направлена вертикально вверх.*



Для того чтобы остановить тело, нужно увеличить величину приложенной силы $\vec{F}$. *Кроме того, на данное тело действует Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$, *направленной вертикально вниз, а также стенка с силой реакции* $\vec{N}$, *направленной горизонтально влево.*

Изобразим на рисунке все силы, действующие на тело. Возьмем прямоугольную декартову систему координат, оси которой направим так, как показано на рисунке. Для покоящегося тела запишем первый закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = 0.$$

Для найденного векторного равенства запишем равенства для проекций векторов на оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX: \quad F \cdot \sin 60^0 - N = 0; \qquad (1)$$

$$OY: \quad F \cdot \cos 60^0 + F_{тр} - m \cdot g = 0. \qquad (2)$$

При минимальном значении внешней силы $\vec{F}$ *величина силы трения покоя достигает максимального значения, равного величине силы трения скольжения, т.е.:*

$$F_{тр} = \mu \cdot N. \qquad (3)$$

Из равенства (1) находим величину силы реакции $\mathbf{N}$, *и подставляем в равенство (3), получим следующее выражение для силы трения:*

$$F_{тр} = \mu \cdot F \cdot \sin 60^0.$$

Подставим вместо силы трения в равенство (2) правую часть данного соотношения, получим формулу для вычисления величины приложенной силы F :

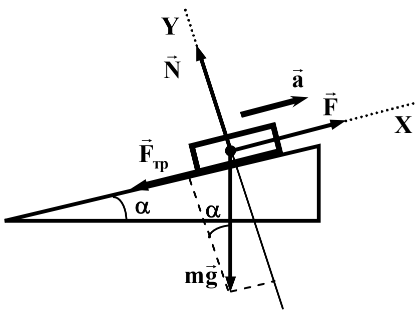
$$F \cdot \cos 60^0 + \mu \cdot F \cdot \sin 60^0 - m \cdot g = 0 \Rightarrow F = \frac{m \cdot g}{\cos 60^0 + \mu \cdot \sin 60^0}.$$

Из последней формулы находим величину силы F :

$$F = \frac{3 \cdot 9{,}8}{\cos 60^0 + 0{,}2 \cdot \sin 60^0} \approx 43{,}7\ H.$$

Пример 15. *На наклонной плоскости с углом наклона* $\alpha = 30^0$ *находится тело массой* $m = 3\ кг$. *Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен* $\mu = 0{,}3$. *К телу прикладывают силу, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Какова должна быть величина этой силы, чтобы тело двигалось вверх по наклонной плоскости с ускорением?*

Решение. *На тело, движущееся вверх вдоль наклонной плоскости, действуют внешние тела: а) Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$, *направленной вертикально вниз; б) наклонная плоскость с силой реакции* $\vec{N}$, *направленной перпендикулярно наклонной плоскости; в) наклонная плоскость с силой трения* $\vec{F}_{тр}$, *направленной против движения тела; г) внешнее тело с силой* $\vec{F}$, *направленной вверх вдоль наклонной плоскости.*



Под действием этих сил тело движется равноускоренно вверх по наклонной плоскости, и, следовательно, вектор ускорения направлен по перемещению тела.

Изобразим вектор ускорения $\vec{a}$ *на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной виде:*

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N}.$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по ускорению движения тела, а ось OY — перпендикулярно наклонной плоскости.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX: \quad m \cdot a = F - F_{тр} - m \cdot g \cdot \sin\alpha; \tag{1}$$

$$OY: \quad 0 = N - m \cdot g \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Сила трения скольжения связана с силой реакции следующим соотношением:

$$F_{тр} = \mu \cdot N. \tag{3}$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции $\mathbf{N}$ *и подставляем в равенство (3), имеем следующее выражение для силы трения:*

$$F_{тр} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha. \tag{4}$$

Подставим в равенство (1) вместо силы трения правую часть равенства (4), получим следующее уравнение для вычисления величины искомой силы:

$$m \cdot a = F - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - m \cdot g \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \sin\alpha\ .$$

Вычислим величину силы F:

$$F = 3 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 3 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30^0 + 3 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 30^0 = 25{,}3\ H.$$

§2.9. Сила сопротивления.

При движении тел в жидкостях и газах возникают так же силы трения, но они существенно отличаются от сил сухого трения. Эти силы называются *силами вязкого трения*, или *силы сопротивления*. Силы вязкого трения возникают только при относительном движении тел. Силы сопротивления зависят от многих факторов, а именно: от размеров и формы тел, от свойств среды (плотности, вязкости), от скорости относительного движения. При малых скоростях сила сопротивления прямо пропорционально зависит от скорости движения тела относительно среды, т.е.:

$$\boxed{\left|\vec{F}_{сопротивления}\right| = \alpha \cdot \left|\vec{V}_{отн}\right|}, \qquad (2.11)$$

где $\vec{V}_{отн}$ – вектор скорости движения теля относительно среды.

При больших скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения тела относительно среды, т.е.:

$$\boxed{\left|\vec{F}_{сопротивления}\right| = \beta \cdot \left|\vec{V}_{отн}\right|^2}, \qquad (2.12)$$

где α, β – некоторые коэффициенты пропорциональности, называемые *коэффициентами сопротивления*.

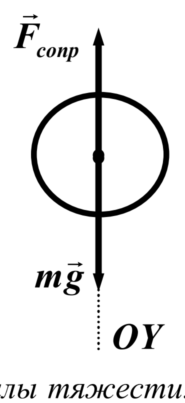
Вопросы для самоконтроля

1. При каких условиях возникает сила сопротивления?
2. По какой формуле вычисляется сила трения для малых скоростей движения?
3. По какой формуле вычисляется сила трения при большой скорости движения?

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 16. *Два шарика падают в воздухе. Шарики (сплошные) сделаны из одного материала, но диаметр одного из шариков вдвое больше, чем другого. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадратично зависит от скорости движения тела.*

Решение. *Изобразим все силы, действующие на шарик, движущийся в воздухе вертикально вниз. На него действует Земля с силой тяжести* $m\vec{g}$ *и воздух с силой сопротивления* $\vec{F}_{сопр}$. *Изобразим рассмотренные силы на рисунке. В начальный момент времени равнодействующая всех сил* $m\vec{g} + \vec{F}_{сопр}$ *имеет максимальное значение, так как скорость шарика равна нулю и сила сопротивления также равна нулю. В этот момент шарик имеет максимальное ускорение, равное* $\vec{g}$.



По мере движения шарика скорость его движения увеличивается, и, следовательно, сила сопротивления воздуха возрастает. В некоторый момент времени сила сопротивления достигает величины, равной величине силы тяжести. С этого момента времени шарик движется равномерно.

Запишем первый закон Ньютона для равномерного движения шарика:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = 0.$$

Направим ось OY вертикально вниз. Запишем для данного векторного равенства равенство для проекций векторов на ось OY:

$$OY: \quad m \cdot g - F_{сопр} = 0. \qquad (1)$$

Сила сопротивления зависит от площади поперечного сечения шарика S *и величины его скорости движения* V *следующим образом:*

$$F_{сопр} = \alpha \cdot S \cdot V^2, \qquad (2)$$

где α – *коэффициент сопротивления.*

Из равенств (1) и (2) вытекает следующее соотношение:

$$\alpha \cdot S \cdot V^2 = m \cdot g. \qquad (3)$$

Выразим массу шарика через его плотность и объем, а объем в свою очередь, — через радиус шарика:

$$m = \rho \cdot V_{шара} = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3. \qquad (4)$$

Из данного выражения находим массу m *и подставляем в равенство (3), получим следующее равенство:*

$$\alpha \cdot S \cdot V^2 = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3. \qquad (5)$$

Выражаем площадь поперечного сечения шарика через его радиус:

$$S = \pi \cdot R^2. \qquad (6)$$

С учетом соотношения (6) равенство (5) примет следующий вид:

$$\alpha \cdot \pi \cdot R^2 \cdot V^2 = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow \alpha \cdot V^2 = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R \Rightarrow V^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{\rho \cdot 4 \cdot R}{3 \cdot \alpha}}.$$

Обозначим R_1 – *как радиус первого шарика;* R_2 – *как радиус второго шарика. Запишем формулы для скоростей установившегося движения первого и второго шариков:*

$$V_1 = \sqrt{\frac{\rho \cdot 4 \cdot R_1}{3 \cdot \alpha}}; \quad V_2 = \sqrt{\frac{\rho \cdot 4 \cdot R_2}{3 \cdot \alpha}}.$$

Из полученных равенств находим отношение скоростей движения шариков:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{\frac{\rho \cdot 4 \cdot R_1}{3 \cdot \alpha}}}{\sqrt{\frac{\rho \cdot 4 \cdot R_2}{3 \cdot \alpha}}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Из условия задачи отношение радиусов шариков равно двум. Используя это условие, находим отношение скоростей:

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2} = 1{,}41.$$

§2.10. Основное уравнение динамики

Основное уравнение динамики материальной точки представляет собой не что иное, как математическое выражение второго закона Ньютона:

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i}. \tag{2.13}$$

В прямоугольной декартовой системе координат основное уравнения динамики в проекциях на оси координат имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum_i F_{xi}, \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum_i F_{yi}, \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= \sum_i F_{zi}. \end{aligned}} \tag{2.14}$$

В инерциальной системе отсчета в сумму всех сил входят только силы, являющиеся мерами взаимодействий, в неинерциальных системах в сумму сил входят силы инерции.

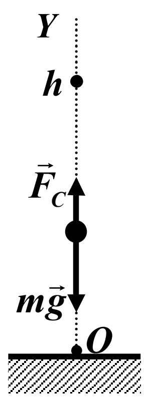
С математической точки зрения соотношение (9) представляет собой дифференциальное уравнение движения точки в векторном виде. Его решение является основной задачей динамики материальной точки.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое соотношение является основным уравнением динамики?
2. Как выглядят уравнения динамики в прямоугольной декартовой системе координат?

<u>*Примеры решения задач*</u>

***Пример 17*[*]**. *Капля дождя массой* $\boldsymbol{m = 10\ г}$ *начинает падать с высоты* $\boldsymbol{h = 1000\ м}$, *во время ее полета действует сила сопротивления, величина которой пропорциональна скорости. Коэффициент сопротивления равен* $\boldsymbol{\alpha = 0{,}02\, кг/с}$. *Найти: а) зависимость скорости полета капли от времени; б) максимальную скорость капли.*



Решение. *Во время полета капли на нее действует две силы: сила тяжести* $\mathbf{m\vec{g}}$ *и сила сопротивления* $\vec{F}_C = -\alpha \cdot \vec{V}$. *Изобразим все силы на рисунке. Выберем вертикально направленную ось OY, начало отсчета которой расположим на поверхности Земли. Запишем основное уравнение динамики:*

$$m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_C.$$

---

[*]Задача повышенной сложности

Спроектируем равенство на ось OY, будем иметь соотношение:

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = -mg + F_C \Rightarrow m \cdot \frac{dv_y}{dt} = -mg + \alpha \cdot v.$$

Разделим обе части последнего равенства на m *и одновременно умножим обе части на* dt*, учтем что* $v_y = -v$*, получим выражение:*

$$-dv = (-mg + \alpha \cdot v) \cdot \frac{dt}{m} \Rightarrow dv = \left(-g + \frac{\alpha}{m} \cdot v\right) \cdot dt.$$

Разделим обе части этого выражения на $\left(-g + \frac{\alpha}{m} \cdot v\right)$*, получим соотношение:*

$$\frac{dv}{\left(-g + \frac{\alpha}{m} \cdot v\right)} = -dt.$$

Интегрируем последнее соотношением, получаем зависимость скорости от времени:

$$\int \left(\frac{\alpha}{m} \cdot v - g\right)^{-1} \cdot dv = -\int dt \Rightarrow \frac{m}{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{m} \cdot v - g\right) = -t + C \Rightarrow \frac{\alpha}{m} \cdot v - g = C_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{m} \cdot t}.$$

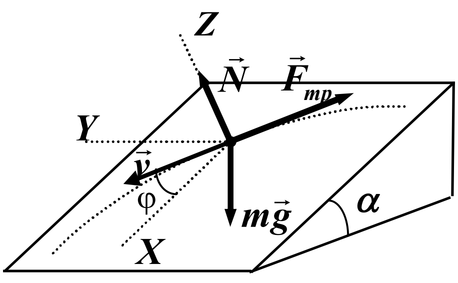
Константу C_1 *найдем из начальных условий* $(v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -g)$*, получим искомую зависимость скорости от времени:*

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\frac{a}{m} \cdot t}\right).$$

Определяем максимальную скорость из условия $t \to \infty \Rightarrow v(t) \to v_{\max}$*:*

$$v_{\max} = \frac{mg}{\alpha} = \frac{0{,}01 \cdot 9{,}81}{0{,}02} \approx 5 \text{ м/с}.$$

Пример 18*[*]. *Небольшая шайба движется по наклонной плоскости, коэффициент трения которой* $k = tg\,\alpha$*, где* α *– угол наклона плоскости к горизонту. Найти зависимость скорости шайбы от угла* φ *между вектором скорости и осью X (см. рис.), если в начальный момент* $v = v_0$ *и* $\varphi = \pi/2$.



Решение. *На шайбу действуют тела: земля с силой тяжести* $m\vec{g}$*; наклонная плоскость с силой нормальной реакции опоры* $\vec{N}$ *и с силой трения* $\vec{F}_{тр}$*. Изобразим на рисунке силы, действующие на шайбу. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси OX, OY и OZ*

$$OX: \ m \cdot a_x = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр} \cdot \cos\alpha;$$

$$OY: \ m \cdot a_y = -F_{тр} \cdot \sin\alpha;$$

$$OZ: \ 0 = N - mg \cdot \cos\alpha.$$

[*]Задача повышенной сложности

Можно легко установить, что тело скользит самопроизвольно с наклонной плоскости, если для коэффициента трения выполняется условие $k = tg\alpha$.

В данной задаче это условие выполняется, следовательно, по всей траектории движения шайбы для силы трения справедлива формула $F_{тр} = k \cdot N$, *которая, с учетом равенства для OZ, преобразуется к виду:*

$$F_{тр} = k \cdot mg \cdot \cos\alpha = tg\alpha \cdot mg \cdot \cos\alpha =$$
$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot mg \cdot \cos\alpha = mg \cdot \sin\alpha.$$

С учетом этого соотношения равенство для оси OX примет вид

$$m \cdot a_x = mg \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Для определения величины тангенциального ускорения шайбы спроектируем второй закон Ньютона на касательную к траектории движения шайбы в рассматриваемой точке, получим следующее соотношение:

$$m \cdot a_\tau = mg \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - F_{тр} = mg \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - mg \cdot \sin\alpha =$$
$$= mg \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \cos\alpha),$$

где a_τ *– величина тангенциального ускорения.*

Сравнивая правые части последних равенств, делаем вывод о том, что для тангенциального ускорения и проекции ускорения на ось OX выполняется условие $a_\tau = -a_x$.

Поскольку $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ *и* $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, *то учетом предыдущего соотношения имеем равенство* $dv = -dv_x$, *интегрирование которого приводит к выражению* $v = v_x + C$, *где* C *– константа интегрирования. Подставим в последнее выражение* $v_x = v \cdot \cos\varphi$, *получим зависимость скорости от угла* φ *:*

$$v = -v \cdot \cos\varphi + C.$$

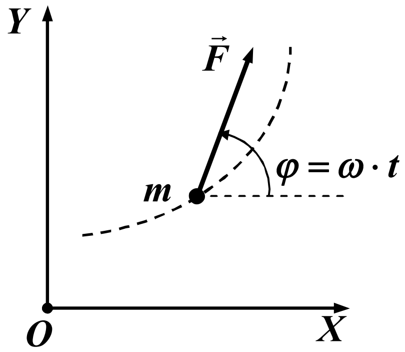
Константу определим из начальных условий ($v = v_0$ *когда* $\varphi = \pi/a$ *.)* $\mathrm{C} = \mathrm{v}_0$. *С учетом этого запишем окончательную зависимость:*

$$v = \frac{v_0}{1 + \cos\varphi}.$$

Минимальное значение скорости достигается тогда, когда $\varphi \to 0$, *и вектор скорости направлен параллельно оси OX, а ее величина равна* $v = v_0/2$.

***Пример 19*[*].** *Частица массы* m *движется в некоторой плоскости под действием постоянной по модулю силы* F, *направление которой поворачивается с угловой скоростью* ω. *В момент* $t = 0$ *скорость частицы равна нулю. Найти модуль скорости частицы как функцию времени, а также путь, проходимый частицей между двумя последовательными остановками.*

Решение. *Свяжем с плоскостью движения частицы прямоугольную декартову систему координат XOY. Ось OX направим по направлению вектора силы в начальный момент времени (см. рис.).*



Запишем основное уравнение динамики в проекции на оси координат:

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt} = F \cdot \cos(\omega \cdot t),$$
$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = F \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Умножим обе части равенств на dt, *получим следующие уравнения:*

$$m \cdot dV_x = F \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot dt,$$
$$m \cdot dV_y = F \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt.$$

Полученные равенства проинтегрируем по времени с учетом начального условия $V(0) = 0$, *получим соотношения:*

$$\int_0^{V_x} m \cdot dV_x = \int_0^t F \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot dt \Rightarrow V_x = \frac{F}{m \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t),$$
$$\int_0^{V_y} m \cdot dV_y = \int_0^t F \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt \Rightarrow V_y = \frac{F}{m \cdot \omega} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)].$$

Модуль вектора скорости находим по теореме Пифагора:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left[\frac{F}{m \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]^2 + \left\{\frac{F}{m \cdot \omega} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)]\right\}^2}.$$

После алгебраических преобразований получим окончательное выражение:

$$\boxed{\left|\vec{V}\right| = 2 \cdot \frac{F}{m \cdot \omega} \cdot \left|\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)\right|}.$$

Чтобы найти моменты остановки приравняем модуль скорости к нулю, и решим тригонометрическое уравнение, получим следующие корни:

$$\frac{\omega \cdot t_n}{2} = \pi \cdot n \Rightarrow t_n = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\omega}.$$

Время между двумя последовательными остановками равно $\Delta t = t_{n+1} - t_n = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$.

Пройденный путь при этом равен

$$\boxed{s = \int_0^{\Delta t} \left|\vec{V}\right| \cdot dt = \int_0^{\Delta t} 2 \cdot \frac{F}{m \cdot \omega} \cdot \left|\sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)\right| \cdot dt = \frac{8 \cdot F}{m \cdot \omega^2}}.$$

---

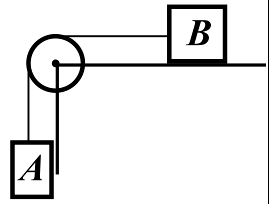
[*]Задача повышенной сложности

Варианты заданий для практических занятий

Вариант №1

⊕ ***Задача №1.*** Под действием силы 10 Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s(t) = A - B \cdot t + C \cdot t^2$, где $C = 1\ м/c^2$. Найти массу тела.

⊕⊕ ***Задача №2.*** Невесомый блок укреплен на конце стола. Гири A и B равной массы $m_1 = m_2 = 1 кг$ соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири B о стол $\mu = 0{,}1$. Найти: 1)ускорение, с которым движутся гири; 2)натяжение нити. Трением в оси блока пренебречь.



⊕⊕ ***Задача №3.*** Гирька массой 50 г, привязанная к нити длиной 25 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Скорость вращения гирьки соответствует частоте 2 об/с. Найти натяжение нити.

⊕⊕ ***Задача №4.*** Мотоцикл едет по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом 11,2 м. Центр тяжести мотоцикла с человеком расположен на расстоянии 0,8 м от поверхности цилиндра. Коэффициент трения покрышек о поверхность цилиндра равен 0,6. С какой минимальной скоростью должен ехать мотоциклист? Каков будет при этом угол наклона его к плоскости горизонта?

⊕⊕⊕ ***Задача №5.*** Парашютист, масса которого 80 кг, совершает затяжной прыжок. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, определить, через какой промежуток времени скорость движения парашютиста будет равна 0,9 от скорости установившегося движения. Коэффициент сопротивления равен 10 кг/с. Начальная скорость парашютиста равна нулю.

⊕⊕⊕ ***Задача №6.*** С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A (см. рис.), чтобы тела **1** и **2** не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

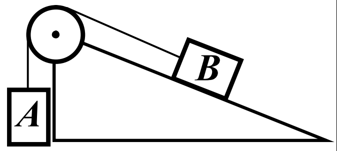
⊕⊕⊕ ***Задача №7.*** К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = m \cdot g/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = k \cdot s$, где k – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

⊕⊕⊕ ***Задача №8.*** На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой m_1 и на ней брусок массой m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем по закону $F = \alpha \cdot t$, где α – постоянная. Найти зависимость от t ускорение доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ.

Вариант №2

⊕ ***Задача №1.*** Поезд массой 500 т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения 98 кН останавливается через время 1мин. Какова начальная скорость поезда?

⊕⊕ ***Задача №2.*** Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющий с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Гири A и B равной массы $m_1 = m_2 = 1кг$ соединены нитью и перекинуты через блок. Найти: 1)ускорение, с которым движутся гири; 2)натяжение нити. Трением в оси блока, а также трением гири B о наклонную плоскость пренебречь.

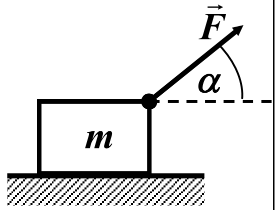


⊕⊕ ***Задача №3.*** Грузик, подвязанный к нити длиной 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период обращения, если нить отклонена на угол 60^0 от вертикали.

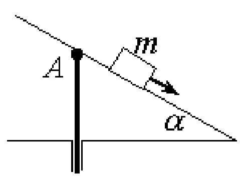
⊕⊕ ***Задача №4.*** Сосуд с жидкостью вращается с частотой 2 Гц вокруг вертикальной оси. Поверхность жидкости имеет вид воронки. Чему равен угол наклона поверхности жидкости в точках, лежащих на расстоянии 5 см от оси?

⊕⊕⊕ ***Задача №5.*** С вертолета, неподвижно висящего на некоторой высоте над поверхностью Земли, сброшен груз массой 100 кг. Считая, что сила сопротивления воздуха изменяется пропорционально скорости, определить, через какой промежуток времени ускорение груза будет равно половине ускорения свободного падения. Коэффициент сопротивления 10 кг/с.

⊕⊕⊕ ***Задача №6.*** На тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = k \cdot t$, где k – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту.



⊕⊕⊕ ***Задача №7.*** Небольшое тело m начинает скользить по наклонной плоскости из точки, расположенной над вертикальным упором A (см. рис.). Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}14$. При каком значении угла α время соскальзывания будет наименьшем?



⊕⊕⊕ ***Задача №8.*** Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути s по закону $\mu = \gamma \cdot s$, где γ – постоянная величина. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и максимальную скорость его на этом пути.