==================== ГЛАВА III ====================

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

§3.1. Закон сохранения импульса

Импульсом материальной точки называется величина равная произведению массы на ее скорость, т.е.

$$\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{V}}. \tag{3.1}$$

Из определения следует, что вектор импульса направлен по вектору скорости $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{V}$. Импульс системы материальных точек равен

$$\boxed{\vec{P}_c = \sum m_i \cdot \vec{V}_i = m \cdot \vec{V}_C}, \tag{3.2}$$

где $m = \sum_i m_i$ – масса системы точек, $\vec{V}_C$ – скорость центра масс.

Импульс тела находится методом разбиения на бесконечно малые части, при этом получается следующее соотношение:

$$\vec{P}_T = \sum \Delta m_i \cdot \vec{V}_i = \int \vec{V} \cdot dm. \tag{3.3}$$

Закон изменения импульса материальной точки в инерциальной системе отсчета вытекает из второго закона Ньютона и имеет следующий вид*:

$$\boxed{d\vec{P} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot dt}, \tag{3.4}$$

где $\sum_i \vec{F}_i$ – представляет собой сумму всех сил (как мер взаимодействия), действующих на материальную точку, $d\vec{P}, dt$ – дифференциалы (бесконечно малые изменения) вектора импульса и времени.

В неинерциальных системах отсчета, в закон изменения импульса материальной точки дополнительно входят силы инерции

$$\boxed{d\vec{P} = \left[\left(\sum_i \vec{F}_i\right) + \vec{F}_{пси} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{цб}\right] \cdot dt}. \tag{3.5}$$

где $\vec{F}_{пси}, \vec{F}_{кор}, \vec{F}_{цб}$ – поступательная сила инерции, сила Кориолиса и центробежная сила соответственно.

Для *средних значений сил* справедливо следующее соотношение:

$$\boxed{\Delta\vec{P} = \left(\sum_i < \vec{F}_i >\right) \cdot \Delta t}, \tag{3.6}$$

где $\Delta\vec{P}$ – изменение импульса точки, $< \vec{F}_i >$ – среднее значение силы.

---

* В это выражение входят мгновенные значения сил.

Для системы материальных точек закон изменения импульса имеет вид

$$\boxed{d\vec{P}_{\text{сист}} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{внешн} \cdot dt}, \tag{3.7}$$

где выражение $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{внешн}$ представляет собой *сумму только внешних сил*, действующих на систему точек. Согласно уравнению (3.7*), импульс системы может изменяться под действием только внешних сил.* Третий закон Ньютона запрещает внутренним силам изменять импульс системы. Отсюда непосредственно вытекает **закон сохранения импульса***: импульс замкнутой системы частиц остаемся постоянным*, т.е. не меняется со временем

$$\boxed{\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i(t) = \overrightarrow{const}}. \tag{3.8}$$

Сформулируем условия сохранения вектора импульса для незамкнутых систем.

1. Вектор импульса сохраняется и у незамкнутой системы, при условии, что сумма всех внешних сил равна нулю, т.е. $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{внешн} = \mathbf{0}$.

2. Если время взаимодействия является бесконечно малой величиной ($dt \to 0$), а внешние силы являются конечной величиной, то произведение суммы внешних сил на время взаимодействия является также бесконечно малой величиной, т.е. $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{вн} \cdot dt \to 0 \Rightarrow d\vec{P} \to \vec{0}$. Это приводит к сохранению вектора импульса системы точек. Примером могут служить выстрелы, разрывы снарядов и.т.д. Важно помнить, что в данном случае импульс системы постоянен только в течение времени взаимодействия dt.

У незамкнутых систем может сохраняться не сам вектор импульса $\vec{P}$, а его проекция P_x на некоторое направление. Рассмотрим такие случаи:

1. Проекция вектора импульса на некоторое направление OX сохраняется со временем в том случае, когда сумма проекций внешних на это направление OX равна нулю, т.е. $\left(\sum_i F_{ix}\right)_{внешн} = \mathbf{0}$. Заметим, что ось OX перпендикулярна равнодействующей внешних сил.
2. Проекция вектора импульса сохраняется со временем, если время взаимодействия является бесконечно малой величиной ($dt \to 0$), а сумма проекций внешних сил являются конечной величиной. В этом случае, произведение суммы проекций внешних сил на время взаимодействия является также бесконечно малой величиной. Важно помнить, что в данном случае проекция импульса системы постоянна только в течение времени взаимодействия dt.

Вопросы для самоконтроля

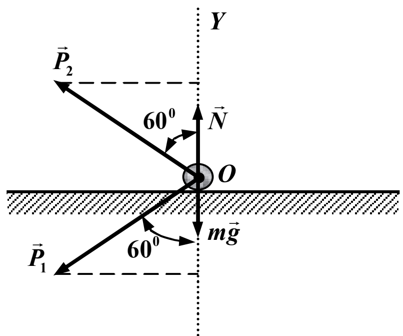
1. Какая величина называется вектором импульса материальной точки? Куда направлен вектор импульса точки?
2. Сформулируйте закон изменения импульса материальной точки для инерциальных систем отсчета.
3. Дайте определения импульса системы материальных точек.
4. Сформулируйте закон изменения импульса системы материальных точек для инерциальных систем отсчета. Какие силы необходимо учитывать в неинерциальных системах отсчета?
5. Какая система материальных точек является замкнутой?
6. В каких случаях сохраняется вектор импульса системы? Приведите примеры.
7. В каких случаях сохраняется проекция вектора импульса системы?

Примеры решения задач

Пример 1. *Мяч массой* $\boldsymbol{m = 100\ г}$, *летевший со скоростью* $\left|\vec{V}_1\right| = 20\ м/с$, *ударился о горизонтальную поверхность. Угол (угол между направлением вектора скорости и перпендикуляром к плоскости) равен* 60^0. *Продолжительность удара равна* $\Delta t = 0{,}01\ с$. *Найти изменение импульса, если удар абсолютно упругий, а угол падения равен углу отражения. Найти величину средней силы нормального давления мяча на поверхность.*

Решение. *Изобразим на рисунке вектор импульса мяча до и после столкновения, а также силы, действовавшие на мяч во время удара. Вектор изменения импульса равен разности векторов* $\vec{P}_2$ *и* $\vec{P}_1$, *т.е.:*

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1. \qquad (1)$$



На мяч во время столкновения действуют две силы; сила тяжести $m\vec{g}$ *и сила реакции* $\vec{N}$. *Вектор изменения импульса мяча* $\Delta\vec{P}$ *направлен по сумме сил* $\vec{N} + m\vec{g}$, *т.е. вектор* $\Delta\vec{P}$ *перпендикулярен горизонтальной плоскости. Проведем ось OY перпендикулярно горизонтальной плоскости. Для векторного равенства (1) запишем равенство для проекций векторов, входящих в это равенство:*

$$\Delta P_y = P_{2y} - P_{1y} = P_2 \cdot \cos 60^0 - \left(- P_1 \cdot \cos 60^0\right) = P_2 \cdot \cos 60^0 + P_1 \cdot \cos 60^0.$$

Так как удар мяча о горизонтальную поверхность упругий, то величина импульса мяча до столкновения равна величине импульса мяча после столкновения, т.е. $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{V}_1$. *С учетом этого соотношения предыдущее равенство примет вид:*

$$\Delta P_y = m \cdot V_1 \cdot \cos 60^0 + m \cdot V_1 \cdot \cos 60^0 = 2 \cdot m \cdot V_1 \cdot \cos 60^0 .$$

В последнее равенство подставим численные данные, получим величину проекции изменения импульса на ось OY:

$$\Delta P_y = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 20 \cdot \cos 60^0 = 2\ кг \cdot м/с .$$

Проекция вектора изменения импульса имеет положительный знак, следовательно, направление вектора $\Delta\vec{P}$ *совпадает с направлением оси OY, т.е. вектор изменения импульса мяча направлен вертикально вверх.*

Запишем закон изменения импульса мяча во время удара:

$$\Delta\vec{P} = (\vec{N} + m\vec{g}) \cdot \Delta t . \qquad (2)$$

Чтобы найти величину силы реакции, спроектируем векторное равенство (2) на ось OY, получим следующее соотношение:

$$\Delta P_y = (N_y + m \cdot g_y) \cdot \Delta t = (N - m \cdot g) \cdot \Delta t . \qquad (3)$$

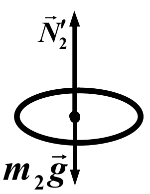
Из равенства (3) выразим силу реакции, получим соотношение:

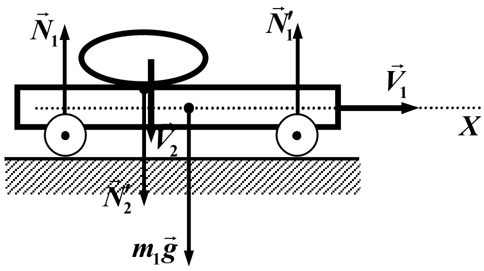
$$N = \frac{\Delta P_y}{\Delta t} + m \cdot g = \frac{2}{0{,}1} + 0{,}1 \cdot 9{,}81 \approx 21\ H .$$

По третьему закону Ньютона величина силы реакции равна величине силы нормального давления мяча на горизонтальную поверхность.

Пример 2. *На вагонетку массой* $m_1 = 800\ кг$*, движущуюся по горизонтальному пути со скоростью* $V_1 = 0{,}2\ м/с$*, насыпали сверху щебень массой* $m_2 = 200\ кг$*. Найти изменение скорости движения вагонетки.*

Решение. *На щебень во время удара* Δt *действовали следующие силы: сила тяжести* $m_2\vec{g}$ *и сила реакции поверхности вагонетки* $\vec{N}_2$*. На вагонетку в этот промежуток времени действовали следующие силы: сила тяжести* $m_1\vec{g}$*, силы реакции горизонтальной поверхности рельс* $\vec{N}_1, \vec{N}_1'$*, и, кроме того, сила нормального давления щебня на поверхность вагонетки* $\vec{N}_2'$*.*





Изобразим на отдельных рисунках данные силы. Для рассматриваемой механической системы «щебень-вагонетка» силы $\vec{N}_2$ *и* $\vec{N}_2'$ *являются внутренними, и, следовательно, эти силы не изменяют импульса данной системы. Силы* $m_1\vec{g}, \vec{N}_1, \vec{N}_1', m_2\vec{g}$ *являются внешними.*

Запишем закон изменения импульса системы «щебень-вагонетка»:

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \left(m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_1' + m_2\vec{g}\right) \cdot \Delta t . \qquad (1)$$

Изобразим на рисунке вектор скорости вагонетки до падения щебня и вектор скорости щебня в момент удара. Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по скорости движения вагонетки $\vec{V}_1$*.*

Запишем для векторного равенства (1) равенство для проекций на ось OX векторов, входящих в это равенство, получим следующее соотношение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1\vec{g}_x + N_{1x} + N_{1x}' + m_2 g_x\right) \cdot \Delta t . \qquad (2)$$

Из рисунка видно, что векторы сил $m_1\vec{g}, \vec{N}_1, \vec{N}_1', m_2\vec{g}$ *направлены перпендикулярно оси OX, и, следовательно, проекции векторов этих сил на эту ось будут равны нулю, т.е.*

$$m_1 g_x = 0, m_2 g_x = 0, N_{1x} = 0, N_{1x}' = 0 .$$

С учетом этих равенств выражение (2) преобразуется к следующему виду:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = 0.$$

Из данного равенства видно, что, хотя рассматриваемая система «щебень-вагонетка» не является замкнутой, проекция импульса этой системы на ось ОХ не изменяется в течение времени удара щебня о поверхность вагонетки. В системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, импульс системы до удара равен $m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2$, *соответственно после удара импульс системы равен* $\left(m_1 + m_2\right) \cdot \vec{V}$, *где* $\vec{V}$ *– вектор скорости системы «щебень-вагонетка» после удара.*

Найдем вектор изменения импульса системы:

$$\Delta \vec{P}_{системы} = \left(m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2\right) - \left(m_1 + m_2\right) \cdot \vec{V}.$$

Спроектировав это равенство на ось ОХ, получим

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 \cdot V_{1x} + m_2 \cdot V_{2x}\right) - \left(m_1 + m_2\right) \cdot V_x = 0. \qquad (3)$$

Учитывая, что проекция вектора скорости щебня в момент удара на ось ОХ равна нулю ($V_{2x} = 0$*), преобразуем равенство (3) к следующему виду:*

$$m_1 \cdot V_1 - \left(m_1 + m_2\right) \cdot V = 0. \qquad (4)$$

Из равенства (4) выразим величину скорости системы после удара:

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_{2\,1}} \cdot V_1.$$

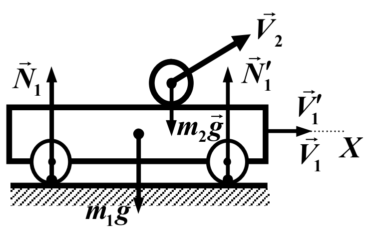
Изменение величины скорости вагонетки за время удара найдем по формуле:

$$\Delta V = V - V_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot V_1 - V_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) \cdot V_1.$$

Подставив цифровые данные, найдем величину $\Delta \mathbf{V}$:

$$\Delta V = \left(\frac{200}{200 + 800} - 1\right) \cdot 0{,}2 = -0{,}16\ м/с.$$

Пример 3. *На железнодорожной платформе, движущейся горизонтально со скоростью* $V_1 = 7{,}2\ км/ч$, *установлено орудие, ствол которого расположен в сторону движения платформы под углом* $\alpha = 30^0$ *к горизонту. Из орудия произвели выстрел, после чего скорость платформы стала равна* $V_1' = 3{,}6\ км/ч$. *Пренебрегая силами трения, найти скорость снаряда, если масса снаряда равна* $m_2 = 10\ кг$, *масса платформы с орудием* $m_1 = 1000\ кг$. *Массой и импульсом пороховых газов пренебречь.*



Решение. *Изобразим только внешние силы, действующие на платформу, и снаряд во время выстрела. На снаряд действует только сила тяжести* $m_2\vec{g}$. *На платформу вместе с орудием действуют силы: сила тяжести* $m_1\vec{g}$, *силы реакции горизонтальной поверхности рельс* $\vec{N}_1$ *и* $\vec{N}_1'$. *Запишем закон изменения импульса для системы «снаряд — платформа»:*

$$\Delta \vec{P}_{системы} = \left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних} \cdot \Delta t = \left(m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_1' + m_2\vec{g}\right) \cdot \Delta t \qquad (1)$$

где Δt *– время выстрела*

Заметим, что, вследствие действия сил давления пороховых газов, рассматриваемая система не является замкнутой, поскольку сумма сил ($m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_1' + m_2\vec{g}$ *) не равна нулю.*

Однако в течение времени выстрела направление сил $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_1'$, $m_2\vec{g}$ *не изменяется. Поэтому выбираем ось ОХ по направлению движения платформы, и, спроектировав равенство (1) на эту ось, получим следующее соотношение:*

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 g_x + N_{1x} + N_{1x}' + m_2 g_x\right)\cdot \Delta t\,. \tag{2}$$

Проекции сил $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_1'$, $m_2\vec{g}$ *на ось ОХ равны нулю. С учетом этого равенство (2) примет вид*

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = 0\,. \tag{3}$$

Данное равенство гласит, что, хотя рассматриваемая система «снаряд — платформа» не является замкнутой, однако проекция вектора импульса системы на ось ОХ до выстрела будет равна проекции вектора импульса этой системы после выстрела.

Выразим в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, вектор импульса системы до и после выстрела через массу тел и их скорости:

$$\vec{P}_1 = \left(m_1 + m_2\right)\cdot \vec{V}_1; \qquad \vec{P}_2 = m_1 \cdot \vec{V}_1' + m_2 \cdot \vec{V}_2,$$

где $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ – *соответственно вектор импульса системы до и после выстрела;* $\vec{V}_1$ – *скорость платформы до выстрела;* $\vec{V}_1'$ – *скорость платформы после выстрела;* $\vec{\mathbf{V}}_2$ – *скорость снаряда сразу после выстрела.*

С учетом записанных соотношений равенство (3) примет вид

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = P_{2x} - P_{1x} = \left(m_1 \cdot V_{1x}' + m_2 \cdot V_{2x}\right) - \left(m_1 + m_2\right)\cdot V_{1x} = 0\,. \tag{4}$$

Определив проекции скоростей тел до и после выстрела и подставив в равенство (4), получим следующее уравнение:

$$\left(m_1 \cdot V_1' + m_2 \cdot V_2 \cdot \cos 30^0\right) - \left(m_1 + m_2\right)\cdot V_1 = 0\,. \tag{5}$$

Из данного уравнения находим выражение для скорости снаряда:

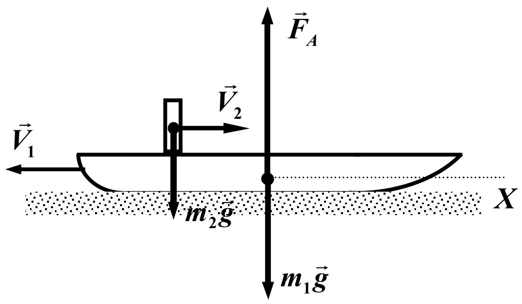
$$V_2 = \frac{\left(m_1 + m_2\right)\cdot V_1 - m_1 \cdot V_1'}{m_2 \cdot \cos 30^0}\,. \tag{6}$$

Подставив численные значения величин, входящих в уравнение (6), найдем величину скорости снаряда после выстрела:

$$V_2 = \frac{\left(1000 + 10\right)\cdot 2 - 1000 \cdot 1}{10 \cdot \cos 30^0} \approx 118\ м/с\,.$$

Пример 4. *Лодка массой* $m_1 = 180\ кг$ *и человек в лодке массой* $m_2 = 90\ кг$ *в начальный момент находятся в покое относительно поверхности воды. Затем человек встает и идет по лодке. С какой скоростью будет двигаться человек относительно поверхности воды, если относительно лодки он движется со скоростью* $V_{21} = 1\ м/с$*? Трением лодки о воду пренебречь.*

Решение. *Рассмотрим внешние силы, действующие в системе «человек—лодка». При движении человека на него действует сила тяжести* $m_2\vec{g}$. *На лодку действует сила тяжести* $m_1\vec{g}$ *и выталкивающая сила (сила Архимеда)* $\vec{F}_A$.



В данной системе возникают колебания в вертикальной плоскости. Объем погруженной части лодки изменяется. Сила Архимеда изменяется при движении человека вдоль лодки, поэтому рассматриваемая система не является замкнутой, и, следовательно, закон сохранения импульса для данной системы не выполняется.

Запишем закон изменения импульса для системы «человек—лодка»:

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних} \cdot \Delta t = \left(m_1\vec{g} + \vec{F}_A + m_2\vec{g}\right)\cdot \Delta t. \qquad (1)$$

Все внешние силы перпендикулярны поверхности воды, поэтому, выбрав ось OX по движению человека и, спроектировав векторное равенство (1) на эту ось, получим выражение

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 g_x + F_{Ax} + m_2 g_x\right)\cdot \Delta t = 0. \qquad (2)$$

Из данного выражения видно, что проекция импульса системы «человек—лодка» на ось OX сохраняется в течение времени движения человека вдоль лодки. Заметим, что начальный импульс системы $\vec{P}_1$ *равен нулю (система покоилась). Выразим конечный импульс системы* $\vec{P}_2$ *в системе отсчета, связанной с поверхностью воды, через массы тел и их скорости движения относительно поверхности воды:*

$$\vec{P}_2 = m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2, \qquad (3)$$

где $m_1 \cdot \vec{V}_1$ *– импульс лодки;* $m_2 \cdot \vec{V}_2$ *– импульс человека.*

С учетом выражения (3), равенство (2) примет вид:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = P_{2x} - P_{1x} = \left(m_1 \cdot V_{1x} + m_2 \cdot V_{2x}\right) - 0 = 0.$$

Определив проекции скоростей на ось координат, получим следующее уравнение:

$$-m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что в равенство (4) входит неизвестная величина скорости человека относительно поверхности воды V_2. *Выразим скорость человека относительно поверхности* *воды* V_2 *через скорость человека относительно лодки* V_{21}, *используем для этого закон сложения скоростей:*

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{21} + \vec{V}_1. \qquad (5)$$

Спроектировав векторное равенство (5) на ось OX, получим следующее соотношение:

$$V_2 = V_{21} - V_1. \qquad (6)$$

Из равенства (6) найдем скорость лодки V_1, *и, подставив ее в равенство (4), получим уравнение*

$$-m_1 \cdot (V_{21} - V_2) + m_2 \cdot V_2 = 0. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) выразим скорость человека относительно поверхности воды V_2:

$$V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot V_{21}.$$

Подставив в последнюю формулу численные данные в системе СИ, получим величину скорости человека относительно поверхности воды:

$$V_2 = \frac{180}{180 + 90} \cdot 1 = \frac{2}{3}\ м/с.$$

***Пример 5**.** *Снаряд, выпущенный из орудия под углом* $\alpha = 60^0$ *к горизонту со скоростью* $V_0 = 600\ м/c$, *в верхней точке траектории разорвался на два равных осколка. Первый осколок сразу же после взрыва имел скорость* $V_1 = 400\ м/c$, *направленную вверх под углом* $\beta = 30^0$ *к горизонту. Определить величину и направление скорости второго осколка. Массой взрывчатки пренебречь.*

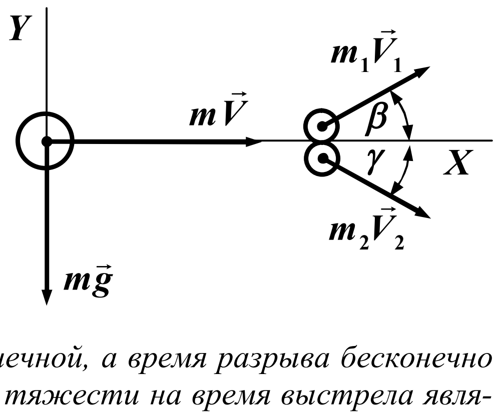
Решение. *На снаряд перед взрывом действует сила тяжести* $m\vec{g}$, *а на осколки — силы тяжестей* $m_1\vec{g}$ *и* $m_2\vec{g}$, *направленные вертикально вниз к центру земли.*

По условию задачи, для масс снаряда и осколков выполняется приближенное равенство

$$m_1 = m_2 \approx \frac{m}{2}. \qquad (1)$$

Запишем закон изменения импульса для снаряда

$$d\vec{P} = m\vec{g} \cdot dt. \qquad (2)$$



Масса снаряда и осколков является величиной конечной, а время разрыва бесконечно малой величиной, отсюда следует, произведение силы тяжести на время выстрела является бесконечно малой величиной, т.е. $m\vec{g} \cdot dt \to 0$. *Это означает, что бесконечно ма-*

---

*Задача повышенной сложности

лое изменение импульса является также бесконечно малой величиной $d\vec{P} \to 0$. *Реально это означает, что вектор импульса не претерпевает значительных изменений.*

Таким образом, в данном случае вектор импульса снаряда непосредственно до взрыва равен векторной сумме импульсов осколков сразу же после взрыва.

Запишем закон сохранения импульса в векторном виде

$$m \cdot \vec{V} = m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2, \qquad (3)$$

где $\vec{V}$ *– скорость снаряда перед выстрелом,* $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ *– скорости осколков после взрыва.*

Для определения величины скорости второго осколка запишем теорему косинусов для векторов $m \cdot \vec{V}$, $m_1 \cdot \vec{V}_1$ *и* $m_2 \cdot \vec{V}_2$, *получим уравнение*

$$(m_2 \cdot V_2)^2 = (m_1 \cdot V_1)^2 + (m \cdot V)^2 - 2 \cdot (m_1 \cdot V_1) \cdot (m \cdot V) \cdot \cos\beta . \qquad (4)$$

Запишем зависимость проекции скорости снаряда на ось OX от времени

$$V_x = V_0 \cdot \cos\alpha - g \cdot \cos 90^0 \cdot t = V_0 \cdot \cos\alpha . \qquad (5)$$

С учетом соотношений (1) и (5) равенство (4) упростится и примет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot V_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot V_1\right)^2 + (V_0 \cdot \cos\alpha)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot V_1\right) \cdot (V_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\beta .$$

Решая полученное уравнение относительно V_2, *находим величину скорости второго осколка непосредственно после взрыва*

$$V_2 = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot V_1\right)^2 + (V_0 \cdot \cos\alpha)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot V_1\right) \cdot (V_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\beta} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 400\right)^2 + (600 \cdot \cos 60^0)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 400\right) \cdot (600 \cdot \cos 60^0) \cdot \cos 30^0} =$$

$$= 323 \; м/с.$$

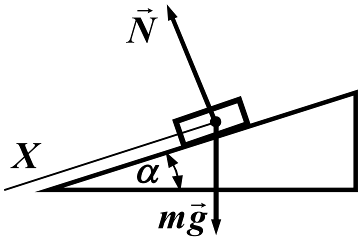
Для определения направления вектора скорости второго осколка (угла γ *) спроектируем векторное равенство (3) на ось OY, получим следующее уравнение:*

$$OY: \quad 0 = m_1 \cdot V_1 \cdot \sin\beta - m_2 \cdot V_2 \cdot \sin\gamma . \qquad (6)$$

Из последнего соотношения определяем величину угла γ

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \sin\beta\right) = \arcsin\left(\frac{400}{323} \cdot \sin 30^0\right) \approx 38^0 .$$

Пример 6 [*]***.*** *Орудие массой* $\boldsymbol{M}$ *соскальзывает по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол* α *с горизонтом. В момент, когда скорость орудия оказалась равна* $\vec{V}$ *, из орудия произвели выстрел в горизонтальном направлении, в результате которого орудие остановилось. Масса снаряда равна* $\boldsymbol{m}$*. Определить рость снаряда сразу же после выстрела.*



Решение. *На орудие, соскальзывающее с наклонной плоскости, действуют внешние тела с силами: Земля с силой* $m\vec{g}$ *; наклонная плоскость с силой реакции* $\vec{N}$ *.*

Изобразим все силы, действующие на орудие на рисунке, при этом силой трения пренебрегаем.

Запишем закон изменения импульса системы «орудие–снаряд»

$$d\vec{P} = \left(M\vec{g} + \vec{N}\right)\cdot dt. \qquad (1)$$

Во время выстрела резко возрастает сила реакции $\vec{N}$ *. Чтобы исключить влияние данной силы, спроектируем полученное равенство (1) на ось OX, будем иметь следующее соотношение*

$$dP_x = \left(Mg_x + N_x\right)\cdot dt. \qquad (2)$$

Далее учтем, что $N_x = N\cdot\cos 90^0 = 0$ *и* $Mg_x = M\cdot g\cdot\sin\alpha$*, преобразуем равенство (2) к следующему виду:*

$$dP_x = Mg\cdot\sin\alpha\cdot dt. \qquad (3)$$

Обычно время выстрела dt *является бесконечно мало величиной, а сила тяжести орудия* Mg *конечная величина, следовательно, величина* $Mg\cdot\sin\alpha\cdot dt$ *также является бесконечно малой величиной. Отсюда вытекает, что* $dP_x \to 0$ *.*

Это означает то, что проекция импульса система «орудие–снаряд» на выбранную ось OX сохраняется со временем.

Запишем закон сохранения проекции импульса системы «орудие–снаряд» на ось OX:

$$M\cdot V_x = m\cdot V_{1x} \Rightarrow M\cdot V\cdot\cos 0^0 = m\cdot V_1\cdot\cos\alpha \Rightarrow M\cdot V = m\cdot V_1\cdot\cos\alpha. \qquad (4)$$

Из соотношения (4), находим величину скорости снаряда

$$V_1 = \frac{M}{m\cdot\cos\alpha}\cdot V.$$

Следует заметить, что сразу же после выстрела орудие будет двигаться под действием силы тяжести и силы реакции наклонной плоскости, а на снаряд будет действовать только сила тяжести. В дальнейшем равенство для проекций импульса системы «орудие–снаряд» на ось OX выполняться не будет.

---

[*]Задача повышенной сложности

§3.2. Работа и мощность

Изменение механического движения тела и, следовательно, его механической энергии происходит под действием на него других тел. Мерой этого действия являются силы, а мерой изменения энергии тела является работа, совершаемая силами.

Работой, совершаемой силой $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении* $d\vec{S}$ называется величина равная

$$dA = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot d\vec{S}\,, \qquad (3.9)$$

где α – угол между вектором силы и вектором перемещения, $\vec{F} \cdot d\vec{S}$ – скалярное произведение вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения.

Следует заметить, что под перемещением $d\vec{S}$ понимается перемещение в общем случае точки приложения силы, а не перемещение тела.
Величина работы в системе СИ измеряется в Джоулях.

Работа, совершаемая силой на криволинейном участке траектории, вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S}\,. \qquad (3.10)$$

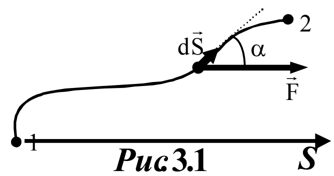


Рис 3.1

Если для вычисления данного криволинейного интеграла выбрана прямоугольная декартова система координат, то, используя известную математическую формулу вычисления скалярного произведения векторов, справедливо следующее выражение:

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} F_x \cdot dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} F_y \cdot dy + \int\limits_{z_1}^{z_2} F_z \cdot dz\,, \qquad (3.11)$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)– координаты начальной и конечной точки соответственно.

Суммируя (интегрируя) выражение (3.10) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, находим работу силы $\vec{F}$ на данном перемещении.

Выражению (3.10) можно придать наглядный геометрический смысл. Работа на пути от точки 1 до точки 2 равна площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью S. При этом площадь фигуры над осью S берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью S – со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

* Вектор $\mathbf{d\vec{S}}$ должен быть настолько малым, что на всем его протяжении вектор силы $\vec{\mathbf{F}}$ не менялся ни по величине, ни по направлению.

Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие мощности. *Среднее значение мощности* равно отношению величины работы ко времени ее совершения, т.е.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{\mathbf{A}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{|\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\vec{\mathbf{S}}| \cdot \mathbf{cos}\ \alpha}{\Delta \mathbf{t}} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot \langle |\vec{\mathbf{V}}| \rangle \cdot \mathbf{cos}\ \alpha, \tag{3.12}$$

где $|\vec{\mathbf{F}}|$ – величина вектора силы, $|\vec{\mathbf{S}}|$ – модуль вектора перемещения, α – угол между векторами $\vec{\mathbf{F}}$ и $\vec{\mathbf{S}}$, $\langle |\vec{\mathbf{V}}| \rangle$ – длина вектора средней скорости точки.

Мгновенная мощность равна производной от работы по времени

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\vec{\mathbf{V}}| \cdot \mathbf{cos}\,\alpha, \tag{3.13}$$

где $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{V}}$ – мгновенные значения вектора силы и вектора скорости.

Величина мощности в системе СИ измеряется в Ваттах.

Для успешного решения задач по данной теме следует придерживаться следующих методических рекомендаций:

1. В том случае, когда известны величина силы и перемещения, а также угол между ними, необходимо использовать формулу (3.9) для определения величины механической работы.
2. В других случаях, прежде чем приступить к решению задачи, необходимо установить все силы, действующие на рассматриваемое тело. Затем на рисунке показать эти силы.
3. Выяснить характер движения тела. Если оно движется равномерно, то величина искомой силы вычисляется с помощью первого закона Ньютона. Для равноускоренного движения величина искомой силы находится из второго закона Ньютона.
4. Затем, используя формулу (3.9), найти работу требуемой силы.
5. В том случае, когда вектор силы изменяется со временем, или траектория движения не является прямолинейной, для нахождения работы необходимо пользоваться соотношением (3.10).

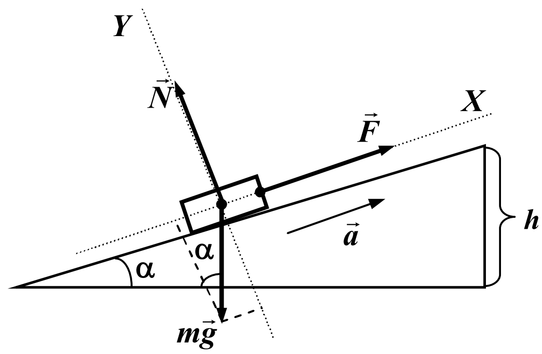
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение работы некоторой силы. Приведите соотношение, по которому вычисляется работа постоянной силы при поступательном движении твердого тела.
2. В каких единицах в системе СИ измеряется работа?
3. По какой формуле вычисляется работа переменной силы? Как это соотношение записывается в прямоугольной декартовой системе координат?
4. Дайте определение средней и мгновенной мощности. В каких единицах в системе СИ измеряется мощность?

Примеры решения задач

Пример 7. *Какую работу совершает сила* $F = 20\ H$ *, поднимая по наклонной плоскости груз массой* $m = 2\ кг$ *на высоту* $h = 2{,}5\ м$ *с ускорением* $a = 5{,}0\ м/c^2$ *. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.*

Решение. *На тело, движущееся вверх вдоль наклонной плоскости, действуют следующие силы: сила тяжести* $m\vec{g}$ *; сила реакции* $\vec{N}$ *и сила* $\vec{F}$ *. Согласно условию задачи, движение тела является равноускоренным, поэтому вектор ускорения тела направлен по движению. Изобразим векторы сил на рисунке.*



Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}.$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по ускорению движения тела, а ось OY — перпендикулярно поверхности наклонной плоскости. Спроектировав предыдущее векторное равенство на ось OX, получим следующее выражение:

$$m \cdot a = F - m \cdot g \cdot \sin\alpha . \qquad (1)$$

Из равенства (17.1) выражаем величину силы $\mathbf{F}$*, получим соотношение:*

$$F = m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin\alpha . \qquad (2)$$

Воспользовавшись формулой для нахождения механической работы постоянной силы, и, используя равенство (2), получим выражение:

$$A = F \cdot S \cdot \cos 0^0 = (m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin\alpha) \cdot S , \qquad (3)$$

где $\mathbf{S}$ *– величина перемещения тела. В данной задаче величина перемещения, равная длине наклонной плоскости, связана с высотой наклонной плоскости соотношением:*

$$S = \frac{h}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

Подставим величину перемещения из равенства (4) в равенство (3), получим следующее соотношение для механической работы:

$$A = (m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{m \cdot a \cdot h}{\sin\alpha} + m \cdot g \cdot h. \qquad (5)$$

В равенстве (5) остается пока неизвестной величина синуса угла наклонной плоскости. Данную величину находим из формулы (2) и, подставив в последнее равенство, получим окончательную формулу для вычисления механической работы:

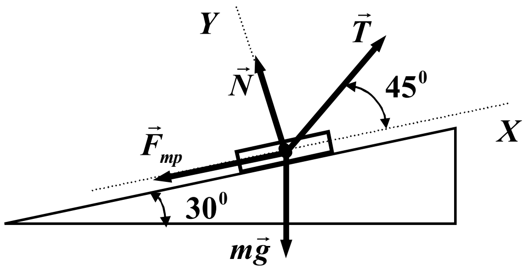
$$A = \frac{m \cdot a \cdot h}{\dfrac{F - m \cdot a}{m \cdot g}} + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot a \cdot h \cdot m \cdot g}{F - m \cdot a} + m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{m \cdot a}{F - m \cdot a} + 1 \right).$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, найдем величину механической работы:

$$A = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5 \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{20 - 2 \cdot 5} + 1 \right) \approx 98{,}1\ Дж.$$

Пример 8. *Ребенок перемещает санки массой* $m = 10$ *кг в гору под уклон* $\alpha = 30^0$ *к горизонту с постоянной скоростью* $V = 0{,}5$ *м/с на расстояние* $S = 20$ *м. Коэффициент трения полозьев о снег равен* $\mu = 0{,}1$*. Веревка образует с поверхностью горы угол* $\beta = 45^0$*. Определить мощность и работу силы натяжения веревки, необходимую для движения санок в указанных условиях.*

Решение. *На санки действуют тела с силами: Земля- с силой тяжести* $m\vec{g}$*, наклонная плоскость с силой реакции* $\vec{N}$*, веревка с силой натяжения* $\vec{T}$ *и наклонная плоскость с силой трения* $\vec{F}_{тр}$*.*



Изобразим данные силы на рисунке. Запишем первый закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{T} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0} \qquad (1)$$

Спроектируем векторное равенство (1) на оси координат OX и OY, будем иметь следующие соотношения:

$$OX: \quad T \cdot \cos 45^0 - m \cdot g \cdot \sin 30^0 - F_{тр} = 0; \qquad (2)$$

$$OY: \quad T \cdot \sin 45^0 + N - m \cdot g \cdot \cos 30^0 = 0. \qquad (3)$$

Из равенства (.3) выражаем силу реакции и, подставим ее в формулу для силы трения $F_{тр} = \mu \cdot N$*, получим соотношение:*

$$F_{тр} = \mu \cdot \left(m \cdot g \cdot \cos 30^0 - T \cdot \sin 45^0\right). \qquad (4)$$

Подставив в равенство (2) вместо $F_{тр}$ *правую часть равенства (4), получим выражение:*

$$T \cdot \cos 45^0 - m \cdot g \cdot \sin 30^0 - \mu \cdot \left(m \cdot g \cdot \cos 30^0 - T \cdot \sin 45^0\right) = 0.$$

Из последнего выражения найдем величину силы натяжения и, подставив в формулу $N = T \cdot V \cdot \cos 45^0$*, получим формулу для вычисления мощности*

$$N = \frac{m \cdot g \cdot \sin 30^0 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^0}{1 + \mu \cdot tg\, 45^0} \cdot V.$$

В последнее выражение подставим числовые данные, найдем величину мощности силы натяжения:

$$N = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 30^0 + 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 30^0}{1 + 0{,}1 \cdot tg\, 45^0} \cdot 0{,}5 = 26 \text{ Вт}.$$

Работу силы натяжения находим из выражения:

$$A = T \cdot S \cdot \cos 45^0 = \frac{m \cdot g \cdot \sin 30^0 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^0}{1 + \mu \cdot tg\, 45^0} \cdot S = 1040 \text{ Дж}.$$

§3.3. Консервативные силы. Потенциальная энергия

Механическая энергия является мерой способности физической системы совершить работу, поэтому количественно энергия и работа выражаются в одних единицах. В системе СИ энергия измеряется в Дж. Различают два вида механической энергии: кинетическую и потенциальную энергии.

Введем понятие потенциальной энергии. Для некоторых сил величина работы зависит от длины траектории (пройденного пути), в этом случае силы называются *неконсервативными*. Если величина работы силы зависит от начального и конечного положения материальной точки, то в этом случае сила называется *консервативной*. К консервативным силам относятся: сила всемирного тяготения, сила тяжести, сила Кулона, сила упругости, если она описывается законом Гука, а также любая центральная сила [*].

Потенциальная энергия является мерой способности физической системы, на которую действует консервативная сила, совершить работу. Однако не для всех консервативных сил принято определять понятие потенциальной энергии. Предположим, что на материальную точку действует консервативная сила, тогда работа этой силы по криволинейному участку траектории вычисляется из соотношения:

$$A_{кон} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1), \tag{3.14}$$

где $\Phi(\vec{r})$– первообразная.

Потенциальная энергия системы, на которую действует консервативная сила, равна первообразной $\Phi(\vec{r})$ взятой с противоположным знаком:

$$\boxed{W_p(\vec{r}) = -\Phi(\vec{r})}. \tag{3.15}$$

Из соотношения (3.15) следует, что *работа консервативной силы равна убыли* [*] *потенциальной энергии,* т.е.

$$\boxed{A_{конс} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p}, \tag{3.16}$$

где W_{p1}, W_{p2}– начальное и конечное значение потенциальной энергии, ΔW_p– изменение потенциальной энергии.

Вектор консервативной силы равен производной с противоположным знаком от потенциальной энергии в направлении перемещения $d\vec{r}$, т.е.:

$$\boxed{\vec{F}_{конс} = -\frac{dW_p}{d\vec{r}}}. \tag{3.17}$$

---

[*] Сила $\boldsymbol{F}$, действующая на точку *P*, называется **центральной** с центром в точке *O*, если во всё время движения она действует вдоль линии, соединяющей точки *O* и *P*.

[*] Убылью величины x называется разность начального (x_1) и конечного (x_2) значений, т.е.: $убыль = x_1 - x_2$.

В прямоугольной декартовой системе координат равенство (3.17) имеет следующий вид:

$$\vec{F}_{конс} = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z}\cdot\vec{k}\right), \qquad (3.18)$$

где $\frac{\partial W_p}{\partial x}$, $\frac{\partial W_p}{\partial y}$, $\frac{\partial W_p}{\partial z}$ – частные производные от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

Проекции вектора консервативной силы связаны с потенциальной энергией соотношениями

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}}. \qquad (3.19)$$

Потенциальная энергия в поле сил гравитации вычисляется по формуле:

$$\boxed{W_p = -G\frac{m_1\cdot m_2}{r}}, \qquad (3.20)$$

где m_1, m_2 – массы бесконечно малых тел; r – расстояние между ними; G – гравитационная постоянная.

Потенциальная энергия в поле силы тяжести. Для материальной точки массой m, поднятой на высоту h над поверхностью Земли, потенциальная энергия вычисляется по формуле:

$$\boxed{W_p = m\cdot g\cdot h}. \qquad (3.21)$$

Для тел, размерами которых нельзя пренебречь, потенциальная энергия силы тяжести находится по формуле:

$$\boxed{W_p = m\cdot g\cdot h_{центра\ масс}}, \qquad (3.22)$$

где $h_{центра\ масс}$ – высота центра масс тела.

Потенциальная энергия сил упругости равна

$$W_p = \frac{k\cdot x^2}{2}, \qquad (3.23)$$

где k – коэффициент жесткости, x – величина деформации пружины.

Потенциальная энергия в поле сил Кулона находится из соотношения:

$$\mathbf{W_p} = \mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{q_1}\cdot\mathbf{q_2}}{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r}}, \qquad (3.24)$$

где $\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}$ – величина точечных зарядов; $\mathbf{r}$ – расстояние между ними; $\mathbf{k}$ – постоянная, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – диэлектрическая проницаемость среды.

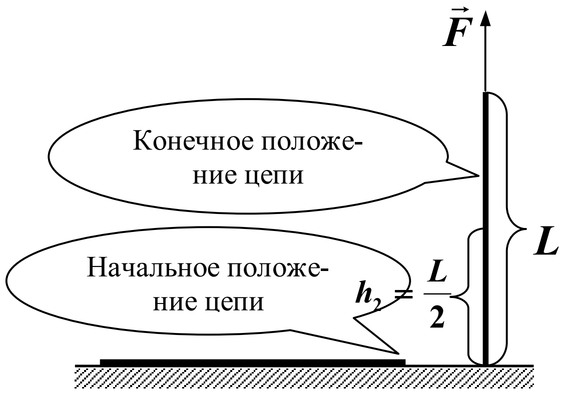
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения механической и потенциальной энергии. В каких единицах в системе СИ измеряется механическая энергия?
2. Какое соотношение устанавливает взаимосвязь убыли потенциальной энергии и работы консервативной силы?
3. Каким соотношением связаны вектор консервативной силы и величина потенциальной энергии?
4. По какой формуле рассчитывается потенциальная энергия материальной точки, на которую действует гравитационная сила?
5. По каким формулам вычисляется величина потенциальной энергии материальной точки и твердого тела, на которую действует сила тяжести?
6. По какой формуле вычисляется величина потенциальной энергии материальной точки, на которую действует сила упругости?

Примеры решения задач

Пример 9. *Цепь массой* $m = 10$ **кг** *и длиной* $L = 1{,}5$ **м** *лежит на горизонтальной поверхности пола. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы перевести ее в вертикальное положение, оторвав нижний конец от поверхности пола?*

Решение. *Для подъема цепи мы прикладываем такую величину внешней силы* $\vec{F}$, *при которой цепь поднимается с минимальной скоростью. В этом случае кинетической энергией цепи можно пренебречь. Формулу (3.9) для определения работы силы* $\vec{F}$ *применять нельзя, так как при подъеме сила возрастает.*



Увеличение величины внешней силы связано с тем, что при подъеме цепи увеличивается масса цепи, оторвавшейся от горизонтальной поверхности. Поскольку подъем цепи совершается равномерно, то в любой момент времени величина внешней силы равна силе тяжести той части цепи, которая уже оторвалась от поверхности.

В данной задаче мы сталкиваемся с работой переменной силы. Выразим работу этой силы через работу силы тяжести. Найдем вначале работу силы тяжести через изменение потенциальной энергии:

$$A_{mg} = -\left(m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1\right),$$

где $m \cdot g \cdot h_2 -$ *конечная величина потенциальной энергии цепи;* $m \cdot g \cdot h_1 -$ *начальная величина потенциальной энергии;* $h_2 -$ *высота центра масс поднятой цепи над горизонтальной поверхностью;* $h_1 -$ *высота центра масс цепи, лежащей на горизонтальной поверхности. Если пренебречь поперечными размерами цепи по сравнению с ее длиной, то в этом случае* $h_1 = 0$. *С учетом этого имеем соотношение:*

$$A_{mg} = -m \cdot g \cdot h_2 .$$

Поскольку в любой момент времени вектор внешней силы $\vec{F}$ *направлен против вектора силы тяжести поднятой части цепи и, кроме того, величины этих сил равны, то* *работа внешней силы равна работе силы тяжести, взятой с противоположным знаком, т.е.:*

$$A_F = -A_{mg} = m \cdot g \cdot h_2 .$$

Учитывая, что высота центра масс однородной цепи равна половине ее длины, имеем окончательное равенство для определения работы внешней силы:

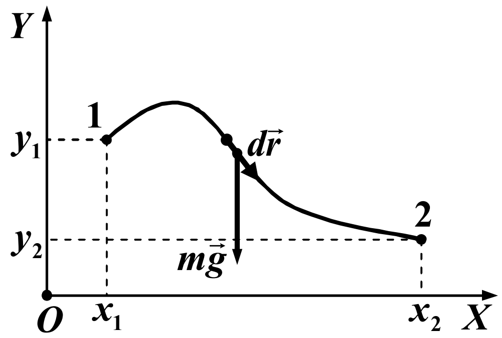
$$A_F = m \cdot g \cdot \frac{L}{2} .$$

Находим величину работы:

$$A_F = 10 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1{,}5}{2} = 73{,}5 \text{ Дж} .$$

Пример 10. *Частица массы* m *движется в поле силы тяжести* $m\vec{g}$ *из точки* 1 *в точку* 2. *Доказать, что сила тяжести является консервативной. Найти выражение для потенциальной энергии частицы.*

Решение. *Для решения данной задачи разобьем траекторию частицы на бесконечно малые части* $d\vec{r}$ *(см. рис.). Вычислим работу, которую совершает сила тяжести при перемещении материальной точки из положения* 1 *в положение* 2.



В прямоугольной декартовой системе координат для вектора бесконечно малого перемещение $d\vec{r}$ *и вектора силы тяжести* $m\vec{g}$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}, \\ m\vec{g} &= 0 \cdot \vec{i} - mg \cdot \vec{j}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Работа силы тяжести на бесконечно малом участке траектории частицы равна скалярному произведению вектора силы тяжести $m\vec{g}$ *на вектор бесконечно малого перемещения* $d\vec{r}$

$$\delta A = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg_x \cdot dx + mg_y \cdot dy . \qquad (2)$$

Из равенства (1) видно, что $mg_x = 0$ *и* $mg_y = -mg$. *С учетом последних соотношений, равенство (2) примет вид*

$$\delta A = 0 \cdot dx - mg \cdot dy = -mg \cdot dy . \qquad (3)$$

Полная работа при движении частицы из положения 1 *в положение* 2 *равна следующему интегралу:*

$$A = \int_{y_1}^{y_2} (-mg) \cdot dy = (-mg \cdot y)\Big|_{y_1}^{y_2} = mg \cdot y_1 - mg \cdot y_2 . \qquad (4)$$

Равенство (4) показывает, что работа силы тяжести зависит от координат (y_1, y_2*) начальной и конечной точки и не зависит от пройденного пути, следовательно, сила тяжести является консервативной.*

Из выражения (4) видно, что первообразная равна $\Phi(y) = -mg \cdot y$, *тогда выражение для потенциальной энергии частицы имеет вид* $W_p(y) = -\Phi(y) = mg \cdot y$.

§3.4. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии

Величина, которая характеризует способность движущейся точки (тела) совершать работу, называется кинетической энергией.

Для материальной точки кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$\boxed{W_k = \frac{m \cdot V^2}{2}}, \tag{3.25}$$

где m – масса точки; V – ее скорость.

В системе СИ кинетическая энергия измеряется в *Дж.*

Кинетическая энергия системы материальных точек находится по следующей формуле:

$$\boxed{W_k = \sum_i \frac{m_i \cdot V_i^2}{2}}. \tag{3.26}$$

Теорема об изменение кинетической энергии. Бесконечно малое изменение кинетической энергии частицы на бесконечно малом перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на нее

$$\boxed{dW_k = \delta A_1 + \delta A_2 + \ldots + \delta A_n = \sum_i \delta A_i}. \tag{3.27}$$

Конечное изменение кинетической энергии точки равно сумме работ всех сил, действующих на нее

$$\boxed{\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_i A_i}. \tag{3.28}$$

Заметим, что выражения (3.27) и (3.28) справедливы в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. В неинерциальной системе отсчета кроме сил, действующих на рассматриваемую частицу со стороны каких-либо тел (сил взаимодействия), необходимо учитывать и силы инерции.

В тех случаях, когда возникает необходимость использовать теорему об изменении кинетической энергии, требуется соблюдать следующие методические рекомендации:

1. Изобразить все силы, действующие на материальную точку или тело, после чего записать теорему об изменении кинетической энергии с учетом конкретных сил, действующих на тело или материальную точку.

2. Изобразить на рисунке вектор перемещения. Используя условие задачи, выяснить, работа каких сил равна нулю (работа силы равна нулю в том случае, когда вектор силы перпендикулярен перемещению). С учетом этого упростить записанное выражение для изменения кинетической энергии.

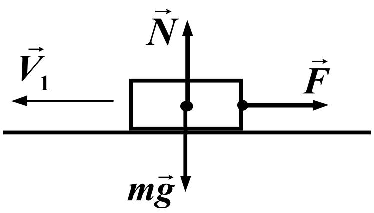
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение кинетической энергии. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия материальной точки?
2. В каких единицах в системе СИ измеряется кинетическая энергия?
3. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия системы материальных точек?
4. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии частицы для бесконечно малых перемещений.
5. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии частицы для конечных участков траекторий.

<u>Примеры решения задач</u>

Пример 11. *На тело массой* $\boldsymbol{m = 1\ кг}$*, движущееся по горизонтальной поверхности со скоростью* $\boldsymbol{V_1 = 1{,}0\ м/c}$*, начала действовать постоянная сила, направленная противоположно скорости тела. Найти работу этой силы к моменту времени, когда величина скорости тела после изменения направления будет в два раза больше первоначальной.*

Решение. *На тело, движущееся по горизонтальной поверхности, действуют следующие силы: сила тяжести* $\boldsymbol{m\vec{g}}$*, сила реакции* $\boldsymbol{\vec{N}}$ *и внешняя сила* $\boldsymbol{\vec{F}}$*. Изобразим эти силы на рисунке.*



Запишем выражение для изменения кинетической энергии тела

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} - \frac{m \cdot V_1^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_F, \qquad (1)$$

где $\frac{m \cdot V_2^2}{2}$ *– конечная кинетическая энергия тела;* $\frac{m \cdot V_1^2}{2}$ *– начальная кинетическая энергия тела;* A_{mg} *– работа силы тяжести;* A_N *– работа силы реакции;* A_F *– работа внешней силы. Работа силы тяжести и силы реакции равна нулю, так как угол между векторами этих сил и вектором перемещения равен* $\boldsymbol{90^0}$*.*

С учетом того, что $V_2 = 2 \cdot V_1$*, равенство (1) примет вид:*

$$\frac{\mathrm{m} \cdot (2 \cdot \mathrm{V}_1)^2}{2} - \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{V}_1^2}{2} = \mathrm{A_F} \Rightarrow \mathrm{A_F} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{V}_1^1}{2}.$$

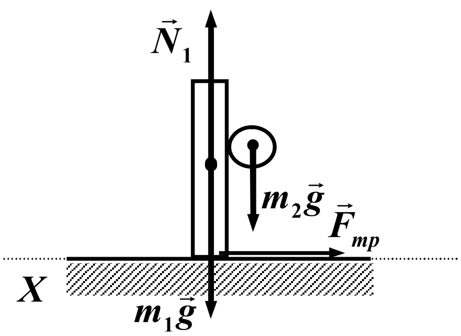
Подставив численные значения величин, входящих в последнее равенство, найдем величину работы внешней силы:

$$\mathrm{A_F} = \frac{1{,}0 \cdot 1{,}0^2}{2} = 0{,}5\ \text{Дж}.$$

Заметим, что данную задачу можно решить с помощью второго закона Ньютона. Однако решение задачи в этом случае является достаточно громоздким, так как в этом случае нам бы пришлось вычислять величины перемещений тела до и после остановки. Попробуйте решить задачу данным способом самостоятельно.

Пример 12. *Фигурист массой* $m_1 = 60\,кг$*, стоящий на льду, ловит мяч массой* $m_2 = 0{,}5\,кг$*, летящий горизонтально со скоростью* $V_2 = 20\,м/с$*. На какое расстояние откатится фигурист с мячом, если коэффициент трения коньков о лед равен* $\mu = 0{,}05$*?*

Решение. *На фигуриста в момент столкновения с мячом действуют силы: сила тяжести* $m_1\vec{g}$*, сила реакции* $\vec{N}_1$ *и сила трения* $\vec{F}_{тр}$*. На мяч в момент столкновения действует сила тяжести* $m_2\vec{g}$*. Изобразим все внешние силы, действующие на механическую систему «фигурист – мяч». Запишем закон изменения импульса рассматриваемой системы в течение времени столкновения* Δt*:*



$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \left(m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр}\right)\cdot\Delta t.$$

Спроектировав данное векторное равенство на ось OX, получим следующее равенство:

$$P_{2x} - P_{1x} = \left(m_1 g_x + m_2 g_x + N_x + F_{тр\,x}\right)\cdot\Delta t.$$

Векторы $m_1\vec{g}$*,* $m_2\vec{g}$ *и* $\vec{N}_1$ *перпендикулярны оси OX, поэтому проекции этих векторов на эту ось равны нулю. С учетом этого получим равенство:*

$$P_{2x} - P_{1x} = -F_{тр}\cdot\Delta t.$$

Выразив величину конечного P_2 *и начального* P_1 *импульсов через массы тел и их скорости, и, подставив в предыдущее равенство, будем иметь соотношение:*

$$\left(m_1 + m_2\right)\cdot V - m_2\cdot V_2 = -F_{тр}\cdot\Delta t,$$

где $\left(m_1 + m_2\right)\cdot V$*,* $m_2\cdot V_2$ *– соответственно величина конечного и начального импульса системы.*

Величина силы трения имеет конечное значение ($F_{тр} = \mu\cdot\left(m_1 + m_2\right)\cdot g$*), а время взаимодействия мяча с фигуристом* Δt *бесконечно мало, поэтому импульсом силы трения (*$F_{тр}\cdot\Delta t$*) можно пренебречь.*

С учетом этого предположения из предыдущего равенства находим скорость системы после взаимодействия

$$V = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot V_2. \qquad (1)$$

Учитывая, что величина кинетической энергии системы в момент остановки равна нулю, запишем теорему об изменении кинетической энергии системы после взаимодействия:

$$\Delta W_k = \left(0 - \frac{\left(m_1 + m_2\right)\cdot V^2}{2}\right) = A_{F_{тр}} + A_{N_1} + A_{(m_1+m_2)g},$$

где $A_{F_{тр}}$, A_{N_1}, $A_{(m_1+m_2)g}$ *– соответственно работа силы трения, силы реакции и силы тяжести.*

Работа двух последних сил равна нулю, так как угол между направлением этих сил и направлением вектора перемещения равен 90^0.

Учитывая, что $A_{F_{тр}} = F_{тр} \cdot S \cdot \cos 180^0 = -\mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \cdot S$, *получим соотношение:*

$$-\frac{(m_1 + m_2) \cdot V^2}{2} = -\mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \cdot S.$$

Отсюда находим величину перемещения, пройденного фигуристом до остановки:

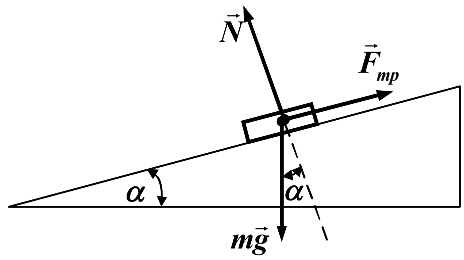
$$S = \frac{V^2}{2 \cdot \mu \cdot g}.$$

С учетом равенства (1) получим выражение для определения S:

$$S = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_1)^2} \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{0{,}5^2}{(60 + 0{,}5)^2} \cdot \frac{20^2}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 9{,}8} = 2{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример 13. *С наклонной плоскости высотой* $h = 5$ м *и углом наклона* $\alpha = 30^0$ *начинает двигаться тело. Скорость тела в конце наклонной плоскости равна* $V_2 = 9$ м/с. *Найти коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью.*

Решение. *Изобразим на рисунке все силы, действующие на тело, движущееся по наклонной плоскости. Запишем выражение для изменения кинетической энергии за все время движения тела по наклонной плоскости:*



$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} - \frac{m \cdot V_1^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_{F_{тр}}. \quad (1)$$

где $V_1 -$ *скорость тела в начале спуска;* $V_2 -$ *скорость в конце наклонной плоскости.*

Работа силы реакции в данной задаче равна нулю, т.к. угол между вектором этой силы и вектором перемещения равен 90^0.

По условию задачи, величина начальной скорости V_1 *равна нулю. Используя определение механической работы, найдем работу силы тяжести и силы трения скольжения:*

$$A_{mg} = m \cdot g \cdot S \cdot \cos(90^0 - \alpha) = m \cdot g \cdot S \cdot \sin \alpha,$$

где $S -$ *длина наклонной плоскости.*

Подставив полученные выражения для работ в равенство (1), получим следующее соотношение:

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} = m \cdot g \cdot S \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot S \cdot \cos \alpha. \quad (2)$$

Учитывая, что $S = \dfrac{h}{\sin\alpha}$*, и проведя математические преобразования, получим выражение для изменения кинетической энергии тела:*

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} = m \cdot g \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot V_2^2}{2} = m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot h \cdot ctg\,\alpha \Rightarrow \frac{V_2^2}{2} = g \cdot h - \mu \cdot g \cdot h \cdot ctg\,\alpha \Rightarrow$$

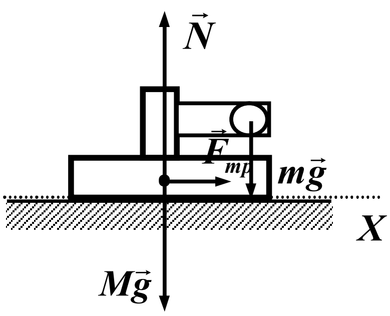
$$\Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot g \cdot h - V_2^2}{g \cdot h \cdot ctg\,\alpha} = \frac{2 \cdot g \cdot h - V_2^2}{g \cdot h} \cdot tg\,\alpha.$$

Подставив в последнее выражение числовые данные, найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 - 9^2}{9{,}8 \cdot 5} \cdot tg\,30^0 = 0{,}2\,.$$

Пример 14. *Из орудия массой* $M = 450$ *кг* *вылетает снаряд массой* $m = 5$ *кг* *в горизонтальном направлении со скоростью* $V_0 = 450$ *м/с*. *После выстрела орудие откатывается на расстояние* $S = 0{,}45$ *м*. *Найти среднюю силу торможения, действующую на орудие.*

Решение. *На систему «снаряд – орудие» во время выстрела действуют следующие внешние силы: сила тяжести орудия* $M\vec{g}$*, сила тяжести снаряда* $m\vec{g}$*, сила реакции* $\vec{N}$ *и сила торможения* $\vec{F}_{тр}$*. Изобразим эти силы на рисунке.*



Запишем закон изменения импульса системы за время выстрела Δt*:*

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \left(M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}\right) \cdot \Delta t\,.$$

Направим ось ОХ по скорости снаряда. Спроектировав данное векторное равенство на эту ось, получим следующее соотношение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = -F_{тр} \cdot \Delta t\,.$$

Величиной импульса силы $F_{тр} \cdot \Delta t$ *можно пренебречь, поскольку время выстрела* Δt *является бесконечно малой величиной* $(\Delta t \approx 0)$*. Поэтому изменение импульса системы равно нулю, т.е. импульс системы до и после выстрела одинаков. Начальный импульс системы равен нулю.*

Приравняв начальный импульс системы к конечному импульсу, получим равенство:

$$0 = m \cdot V_0 - M \cdot V_1\,. \qquad (1)$$

На орудие после выстрела действуют силы: $M\vec{g}$, $\vec{N}$ *и* $\vec{F}_{тр}$*. Запишем теорему об изменении кинетической энергии орудия при движении его до остановки:*

$$W_2 - W_1 = A_{M\vec{g}} + A_{\vec{N}} + A_{\vec{F}_{тр}}\,. \qquad (2)$$

Работа силы тяжести $M\vec{g}$ *и силы реакции* $\vec{N}$ *равны нулю, так как угол между направлениями этих сил и перемещением равен* 90^0. *Работа тормозящей силы равна* $A_{тр} = F_{тр} \cdot S \cdot \cos 180^0 = -F_{тр} \cdot S$.

С учетом этого равенство (2) примет следующий вид:

$$W_2 - W_1 = -F_{тр} \cdot S. \tag{3}$$

По условию, задачи конечная кинетическая энергия орудия равна нулю.

Выразив величину начальной кинетической энергии орудия W_1 *через его начальную скорость, и поставив в равенство (3), получим соотношение:*

$$-\frac{M \cdot V_1^2}{2} = -F_{тр} \cdot S. \tag{4}$$

Найдем из равенства (1) начальную скорость орудия V_1, *и подставив в равенство (4), получим выражение, из которого вычислим силу торможения:*

$$F_{тр} = \frac{m^2 \cdot V_0^2}{2 \cdot M \cdot S} = \frac{5^2 \cdot 450^2}{2 \cdot 0{,}45 \cdot 450} = 12{,}5\ кН.$$

***Пример 15**.** *Локомотив массы* m *начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону* $V = \alpha \cdot \sqrt{S}$, *где* α *– постоянная,* S *– пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые* t *секунд после начала движения.*

Решение. *Начальная кинетическая энергия локомотива равна нулю. С учетом этого запишем теорему об изменении кинетической энергии локомотива*

$$W_k - 0 = A \Rightarrow W_k = A \Rightarrow \frac{m \cdot V^2}{2} = A, \tag{1}$$

где A *– суммарная работа всех сил, действующих на локомотив.*

С учетом того, что $V = \alpha \cdot \sqrt{S}$, *равенство (1) преобразуем к виду:*

$$A = \frac{m \cdot \alpha^2 \cdot S}{2}. \tag{2}$$

Найдем зависимость пройденного пути от времени. Для этого используем соотношение $V = \alpha \cdot \sqrt{S}$, *и то, что величина скорости есть производная от пути по времени, т.е* $V = \dfrac{dS}{dt}$, *получим следующее соотношение:*

$$dS = V \cdot dt \Rightarrow dS = \alpha \cdot \sqrt{S} \cdot dt \Rightarrow \frac{dS}{\sqrt{S}} = \alpha \cdot dt. \tag{3}$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int_0^S \frac{dS}{\sqrt{S}} = \int_0^t \alpha \cdot dt \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{S} = \alpha \cdot t \Rightarrow S = \frac{\alpha^2 \cdot t^2}{4}. \tag{4}$$

Из последнего равенства вместо S *подставим в равенство (2) получим выражение:*

$$A = \frac{m \cdot \alpha^4 \cdot t^2}{8}.$$

---

*Задача повышенной сложности

§3.5. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии

Полная механическая энергия точки (тела) равна сумме кинетической и потенциальной энергии

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\mathbf{к}} + \mathbf{W}_{\mathbf{p}}. \tag{3.29}$$

Теорема об изменении механической энергии. Изменение полной механической энергии материальной точки равно сумме работ всех неконсервативных сил действующих на эту точку, т.е.:

$$\boxed{\Delta W = W_2 - W_1 = \sum A_{нк}}, \tag{3.30}$$

где $\Delta W = W_2 - W_1 -$ изменение механической энергии; $\sum A_{нк} -$ сумма работ неконсервативных сил.

Заметим, что выражение (3.30) справедливо в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. В неинерциальной системе отсчета необходимо учитывать работы сил инерции.

Из данного утверждения следует, *что механическая энергия материальной точки не изменяется с течением времени, если сумма работ неконсервативных сил* $\sum A_{нк}$ *равна нулю.*

Условие $\sum A_{нк} = \mathbf{0}$ выполняется в следующих случаях:

1. *На материальную точку действуют только консервативные силы.*
2. *На материальную точку действуют консервативные и неконсервативные силы, однако сумма работ неконсервативных сил равна нулю.*

Аналогичное утверждение справедливо и для системы, состоящей из **n** материальных точек.

При решении задач с использованием соотношения (3.29) необходимо придерживаться следующих методических рекомендаций:

1. Изобразить все силы, действующие на тело или систему тел. Выяснить, какие из этих сил являются консервативными, а какие неконсервативными.
2. В том случае, когда на тело или систему тел действуют только консервативные силы, записать закон сохранения механической энергии.
3. При наличии неконсервативных сил необходимо выразить изменение механической энергии через алгебраическую сумму работ этих сил.

Вопросы для самоконтроля

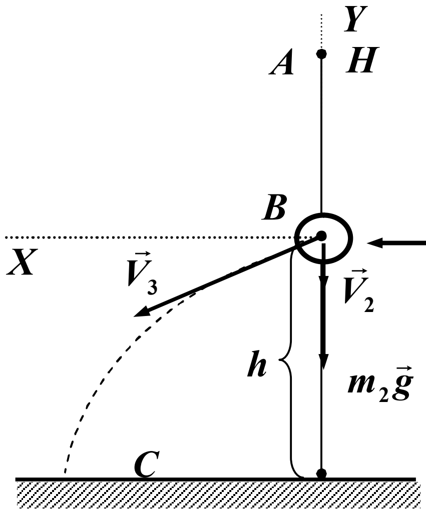
1. Дайте определение механической энергии.
2. В каких единицах в системе СИ измеряется механическая энергия?
3. Сформулируйте теорему об изменении механической энергии частицы.
4. Сформулируйте условия, при которых сохраняется механическая энергия частицы.

Примеры решения задач

Пример 16. *С высоты* $H = 40$ *м свободно падает шар массой* $m_2 = 0{,}1$ *кг. Когда шар находится на высоте* $h_1 = 20$ *м, в него попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью* $V_1 = 100$ *м/с. Масса пули* $m_1 = 0{,}01$ *кг. Найти скорость шара при падении на землю, зная, что пуля застряла в нем. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение. *На систему «шар — пуля» во время удара действуют внешние силы: сила тяжести шара* $m_2\vec{g}$ *и сила тяжести пули* $m_1\vec{g}$.

Запишем закон изменения импульса системы в течение времени столкновения Δt:



$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \left(m_1\vec{g} + m_2\vec{g}\right)\cdot \Delta t, \qquad (1)$$

где $\vec{P}_1, \vec{P}_2 -$ *начальный и конечный импульс системы соответственно.*

Предположим, что время столкновения является бесконечно малой величиной, т.е. $\Delta t \approx 0$. *Отсюда следует, что* $\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{0}$.

Последнее равенство гласит, что импульс системы до и после взаимодействия одинаков, т.е. $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$.

Обозначим скорость пули до взаимодействия $\vec{V}_1$, *скорость шара до взаимодействия* $\vec{V}_2$ *и скорость системы «шар — пуля» после взаимодействия* $\vec{V}_3$.

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\cdot \vec{V}_3, \qquad (2)$$

где $\left(m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2\right) -$ *импульс системы до взаимодействия,* $\left(m_1 + m_2\right)\cdot \vec{V}_3 -$ *импульс системы после взаимодействия.*

Спроектировав векторное равенство (2) на оси OX и OY, получим следующие соотношения:

$$OX: \quad m_1 \cdot V_1 = \left(m_1 + m_2\right)\cdot V_{3x},$$

$$OY: \quad -m_2 \cdot V_2 = \left(m_1 + m_2\right)\cdot V_{3y}. \qquad (3)$$

Выразив из полученных равенств V_{3x}, V_{3y} *и, подставив в равенство* $V_3 = \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2}$, *получим соотношение:*

$$V_3 = \sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{-m_2 \cdot V_2}{m_1 + m_2}\right)^2}. \qquad (4)$$

На участке AB на шар действует только его сила тяжести $m_2\vec{g}$, *которая является консервативной, поэтому энергия шара на этом участке остается постоянной.*

Приравняем механическую энергию шара в точке A ($m_2 \cdot g \cdot H$) *и механическую энергию шара в точке* B $\left(m_2 \cdot g \cdot h + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2}\right)$, *получим следующее равенство:*

$$m_2 \cdot g \cdot H = m_2 \cdot g \cdot h + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2}. \tag{5}$$

Выразив из равенства (5) величину скорости $\mathbf{V_2}$, *и, подставив в равенство (4), получим соотношение:*

$$V_3 = \sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}}{m_1 + m_2}\right)^2}. \tag{6}$$

На участке траектории BC *на систему «шар — пуля» действует сила тяжести* $(m_1 + m_1) \cdot \vec{g}$, *которая является консервативной, поэтому на этом участке выполняется закон сохранения механической энергии.*

Приравняв механическую энергию в точках B *и* C, *получим выражение:*

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h + \frac{(m_1 + m_2) \cdot V_3^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot V_4^2}{2}, \tag{7}$$

где $V_4 -$ *скорость системы в момент падения на землю.*
Из данного равенства выразим скорость V_4:

$$V_4 = \sqrt{V_3^2 + 2 \cdot g \cdot h}. \tag{8}$$

Подставив в равенство (8) вместо $\mathbf{V_3}$ *правую часть соотношения (6), получим формулу для вычисления скорости системы в момент падения на землю:*

$$V_4 = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot V_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot [2 \cdot g \cdot (H - h)] + 2 \cdot g \cdot h}. \tag{9}$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, получим следующее соотношение:

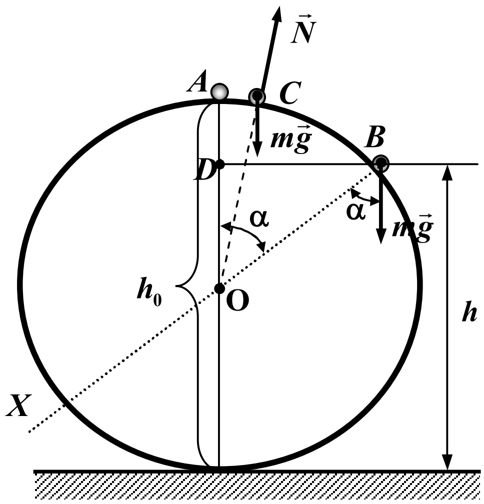
$$V_4 = \sqrt{\left(\frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}1}\right)^2 \cdot 100^2 + \left(\frac{0{,}1}{0{,}01 + 0{,}1}\right)^2 \cdot [2 \cdot 9{,}8 \cdot (40 - 20)] + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 20}.$$

Из последнего выражения найдем величину скорости V_4:

$$V_4 = 28{,}3 \text{ м/с}.$$

Пример 17. *На вершине сферы радиусом* $R = 3$ *м* *лежит тело малых размеров. От небольшого толчка тело приходит в движение. Определить высоту относительно поверхности земли, на которой тело оторвется от поверхности сферы. Силой трения тела о поверхность сферы пренебречь.*

Решение. *Пусть в точке* B *происходит отрыв тела от поверхности сферы. В произвольной точке* C *на тело действуют две силы: сила тяжести* $m\vec{g}$ *и сила реакции* $\vec{N}$. *Обе силы являются консервативными, поэтому механическая энергия тела на участке* AB *постоянна.*



Запишем закон сохранения энергии для точек A *и* B:

$$m \cdot g \cdot h_0 + \frac{m \cdot V_0^2}{2} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot V^2}{2}. \quad (1)$$

С учетом того, что $V_0 = 0$ *и* $h_0 = 2 \cdot R$, *преобразуем предыдущее равенство к следующему виду:*

$$m \cdot g \cdot 2 \cdot R = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot V^2}{2}. \quad (2)$$

В точке отрыва тела от поверхности сферы на него действует только сила тяжести. Запишем второй закон Ньютона в точке B *в проекции на ось ОХ:*

$$m \cdot a_ц = m \cdot g \cdot \cos\alpha. \quad (3)$$

Подставим в равенство (3) вместо $a_ц = \frac{V^2}{R}$, *получим соотношение:*

$$m \cdot \frac{V^2}{R} = m \cdot g \cdot \cos\alpha. \quad (4)$$

Из треугольника ODB *находим* $\cos\alpha$ *и, подставив в равенство (4), имеем следующее соотношение:*

$$m \cdot \frac{V^2}{R} = m \cdot g \cdot \frac{h - R}{R} \Rightarrow V^2 = g \cdot (h - R). \quad (5)$$

Из полученного равенства найдем V^2 *и поставим это выражение в равенство (2), получим уравнение для высоты* h:

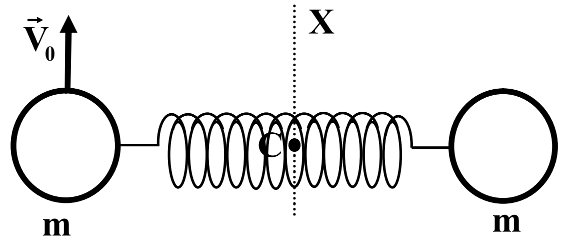
$$m \cdot g \cdot 2 \cdot R = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot V^2}{2}. \quad (6)$$

Сократив в последнем уравнении mg *и решив полученное уравнение относительно* h, *получим формулу для вычисления высоты:*

$$h = \frac{5}{3} \cdot R = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5\ м.$$

Пример 18*[*]*. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат две небольшие шайбы, каждая массой* m*, которые соединены между собой пружинкой. Одной из шайб сообщили начальную скорость* V_0*. Найти механическую энергию вращательного и колебательного движений этой системы.*

Решение. *На систему во время движения дествуют следующие внешние силы:* $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}$*– соответственно сила тяжести первой и второй шайбы;* $\vec{N}_1, \vec{N}_2$*– силы реакций первого и второго шарика.*



При установившемся движении центр масс этой системы будет совершать прямолиниейное равномерное движение со скорстью $\vec{V}_C$*, и кроме того, шайбы будут соверщать вращательное и колебательное движения около центра масс.*

Так как сумма внешних сил равна нулю, то для нахождения скорости центра масс воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1 \cdot \vec{V}_0 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{V}_C \Rightarrow m_1 \cdot V_{0x} = (m_1 + m_2) \cdot V_{Cx} \Rightarrow V_{Cx} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot V_{0x}.$$

Учитывая что $m_1 = m_2 = m$*,* $V_{0x} = V_0$ *и* $V_{Cx} = V_C$*, получим следующее выражение для скорости центра масс:* $V_C = V_0/2$.

Находим кинетическую энергию поступательного движения системы:

$$W_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot V_C^2}{2} = \frac{2 \cdot m \cdot \left(\frac{V_0}{2}\right)}{2} = \frac{m \cdot V_0^2}{4}.$$

На систему во время движения действуют консервативные силы $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}$ *и сила упругости пружины, а также силы реакций* $\vec{N}_1, \vec{N}_2$*, при чем работа последних сил равна нулю, поэтому механическая энергия рассматриваемой системы будет постоянной во время ее движения. Запишем закон сохранения механической энергии системы:*

$$\frac{m \cdot V_0^2}{2} = W_1 + W_2, \qquad (1)$$

где W_2*– представляет собой механическую энергию колебательного и вращательного движения системы. Заметим, что механическая энергия колебательного движения представлена суммой кинетической и потенциальной энергии.*

Из равенства (1) находим искомую энергию W_2

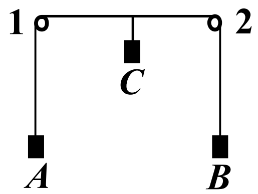
$$W_2 = \frac{m \cdot V_0^2}{2} - W_1 = \frac{m \cdot V_0^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{4} = 0{,}75 \cdot m \cdot V_0^2$$

$$\mathrm{W_2} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{V_0}^2}{2} - \mathrm{W_1} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{V_0}^2}{2} - \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{V_0}^2}{4} = 0{,}75 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{V_0}^2.$$

---

[*]Задача повышенной сложности

***Пример 19**.** *Нить переброшена через гладкие горизонтальные стержни* $\mathbf{1}$ *и* $\mathbf{2}$*, на ее концах и в середине подвешены одинаковой массы грузы* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ *(см. рис.). Расстояние*



между стержнями равно $\boldsymbol{L}$*. В некоторый момент груз* $\boldsymbol{C}$ *осторожно отпустили, и система пришла в движение. Найти скорость груза* $\boldsymbol{C}$ *в момент, когда кинетическая энергия системы максимальна.*

Решение. *При осторожном отпускании груза* $\boldsymbol{C}$ *в системе возникают колебания только в плоскости чертежа. Кинетическая энергия достигает максимальной величины тогда, когда система находится в положении равновесия.*

Построим силы действующие на груз $\boldsymbol{C}$ *в положении равновесия (см. рис. 1.) и определим необходимый угол* α.

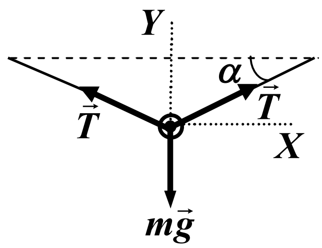


Рис.1

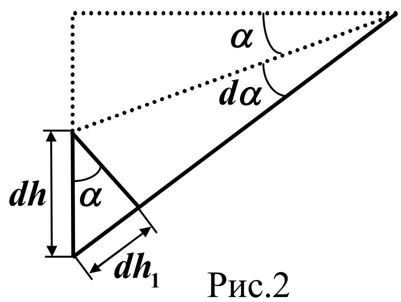


Рис.2

Запишем первый закон Ньютона в проекции на ось OY:

$$\boldsymbol{T} \cdot \sin \alpha + \boldsymbol{T} \cdot \sin \alpha - \boldsymbol{mg} = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\boldsymbol{mg}}{2 \cdot \boldsymbol{T}}. \qquad (1)$$

Применив условия равновесия для груза $\boldsymbol{A}$*, можно показать что* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{mg}$*. С учетом этого, из равенства (1) находим величину угла* α*:* $\sin \alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30^0$.

В данной задаче нить является нерастяжимой. С учетом этого изобразим (см. рис. 2.) положение груза $\boldsymbol{C}$ *в моменты времени* $\boldsymbol{t}$ *и* $\boldsymbol{t} + \boldsymbol{dt}$*, где* $\boldsymbol{dt}$*– бесконечно малый промежуток времени движения. Обозначим бесконечно малое перемещение груза* $\boldsymbol{C}$ *через* $\boldsymbol{dh}$*, а груза* $\boldsymbol{B}$ *—* $\boldsymbol{dh_1}$.

Из рис. 2 видно, что перемещенияя $\boldsymbol{dh_1}$ *и* $\boldsymbol{dh}$ *связаны соотношением*

Рис. 2. $$\boldsymbol{dh_1} = \boldsymbol{dh} \cdot \sin \alpha.$$

Разделим обе части последнего равенства на бесконечно малый промежуток времени движения $\boldsymbol{dt}$*, получим соотношение для скорости грузов* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$*:*

$$\frac{\boldsymbol{dh_1}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{V_C} \cdot \sin \alpha.$$

Обозначим $\boldsymbol{V_A} = \boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{V}$*, и учитывая, что для положения равновесия* $\sin \alpha = \sin 30^0 = 0{,}5$ *, получим выражение для скоростей точек* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$*:*

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{V_C}}{2}. \qquad (2)$$

---

*Задача повышенной сложности

При колебательном движении грузов, на каждый из них дествуют консервативные силы $m_A\vec{g}, m_B\vec{g}, m_C\vec{g}$, *и, кроме того, силы натяжения нитей* $\vec{T}_A, \vec{T}_B, \vec{T}_C$.

Можно доказать, что сумма работ сил $\vec{T}_A, \vec{T}_B, \vec{T}_C$ *равна нулю, поэтому нет неконсервативных сил, совершающих работу. Следовательно, в данном случае, полная механическая энергия грузов* A, B, C *не изменяется.*

Запишем закон сохранения механической энергии для начального положения и положения равновесия (см. рис. 3.)

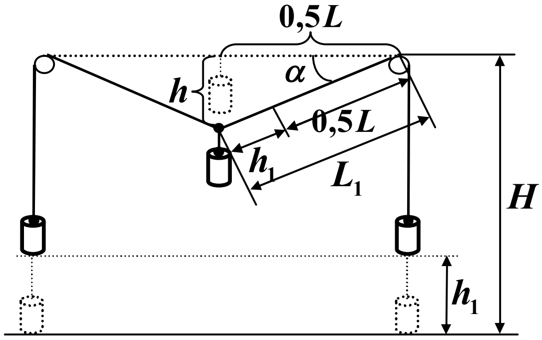


Рис. 3.

$$m_C \cdot g \cdot H = \frac{m_A \cdot V_A^2}{2} + \frac{m_B \cdot V_B^2}{2} + \frac{m_C \cdot V_C^2}{2}.$$

С учетом того что $m_A = m_B = m_C = m$, $V_A = V_B = V$ *и* $V = \frac{V_C}{2}$, *получим упрощенное выражение для закона сохранения механической энергии:*

$$0 = \frac{m \cdot V_C^2}{2 \cdot 4} + \frac{m \cdot V_C^2}{2 \cdot 4} + \frac{m \cdot V_C^2}{2} + m_1 \cdot g \cdot h_1 + m_1 \cdot g \cdot h_1 - m_1 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$
$$0 = \frac{3}{2} m \cdot V_C^2 + 2 \cdot m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h \Rightarrow 0 = \frac{3}{2} V_C^2 + 2 \cdot g \cdot h_1 - g \cdot h \qquad (3)$$

Из рис. 2. видно, что перемещения грузов A, B (h_1) *и перемещение груза* C (h) *связаны с расстоянием между стержнями* (L) *соотношениями:*

$$h = 0{,}5 \cdot L \cdot tg\,\alpha,$$
$$h_1 + 0{,}5 \cdot L = \frac{0{,}5 \cdot L}{\cos\alpha}.$$

Из этих соотношений вместо h *и* h_1 *подставим в последнее равенство (3), получим следующее выражение:*

$$\frac{3}{2} V_C^2 + 2 \cdot g \cdot 0{,}5 \cdot L \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} = 1\right) - g \cdot 0{,}5 \cdot L \cdot tg\,\alpha \qquad (4)$$

Учтем, что $\cos\alpha = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *и* $tg\,\alpha = tg\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, *найдем искомое выражение для скорости груза* C

$$V_C = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot g \cdot L \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}.$$

***Пример 20**.** *Небольшая шайба массой $\boldsymbol{m}$ без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки с высотой $\boldsymbol{h}$ и попадает на доску массой $\boldsymbol{M}$, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 1.). Вследствие трения между шайбой и доской, шайба тормозится и, начиная с некоторого момента, движется вместе с доской как единое целое. Найти суммарную работу сил трения в этом процессе и расстояние, пройденное шайбой относительно доски, если коэффициент трения ее о доску равен $\boldsymbol{\mu}$.*

Решение. *При движении шайбы по гладкой горке, на нее действует сила тяжести $m\vec{g}$, котрая является консервативной, а также сила реакции $\vec{N}$, работа которой по всей траектории шайбы на горке равна нулю, т.к. на любом бесконечно малом участке траектории сила реакции перпендикулярна ему.*

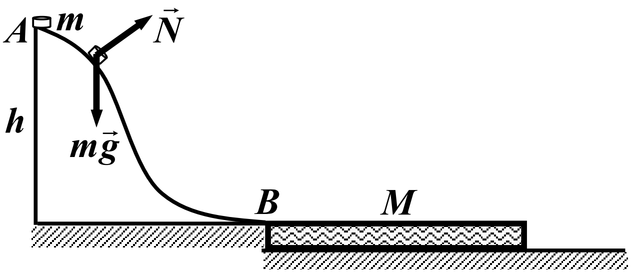


Рис.1.

Поскольку нет неконсервативных сил, совершающих работу на участке $\boldsymbol{AB}$, то на всем протяжении этого участка полная механическая энергия не изменяется со временем.

Запишем закон сохранения энергии:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot V^2}{2}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{V}$ – скорость шайбы в точке $\boldsymbol{B}$.

Из равенства (1) находим скорость шайбы $\boldsymbol{V}$:

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \qquad (2)$$

На систему «шайба–доска», при их совместном движении, дествуют внешние силы: $m\vec{g}, M\vec{g},$– сила тяжести шайбы и доски соответственно, $\vec{N}_1$– сила реации горизонтальной поверхности.

Поскольку сумма этих внешних сил равна нулю, импульс системы «шайба–доска» сохранется во времени.

Запишем закон сохранения импульса системы «шайба–доска», и выразим скорость их совместного движения $\boldsymbol{V_1}$:

$$\begin{gathered} m \cdot \vec{V} = (m + M) \cdot \vec{V}_1 \Rightarrow OX: \quad m \cdot V_x = (m + M) \cdot V_{1x} \Rightarrow \\ m \cdot V = (m + M) \cdot V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m}{m + M} \cdot V. \end{gathered} \qquad (3)$$

При проскальзывании шайбы по доске, на нее со стороны доски дополнительно действуют сила реакции $\vec{N}_2$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, а на доску со стороны шайбы — сила реакции $\vec{N}'_2$ и сила трения $\vec{F}'_{тр}$.

*Задача повышенной сложности

Из указанных сил, действующих на систему «шайба–доска», неконсервативными силами, совершающими работу, являются только силы $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}'_{тр}$.

Запишем закон изменения полной механической энергии, которая в данном случае представлена кинетической энергией:

$$\frac{(m+M)\cdot V_1^2}{2} - \frac{m\cdot V^2}{2} = A_{тр} + A'_{тр}. \qquad (4)$$

Используя соотношения (2) и (3), находим сумарную работу силы трения:

$$\backslash A_{тр} + A'_{тр} = \frac{(m+M)\cdot\left(\dfrac{m}{m+M}\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h}\right)^2}{2} - \frac{m\cdot\left(\sqrt{2\cdot g\cdot h}\right)^2}{2} = -\frac{m\cdot M}{m+M}\cdot g\cdot h. \qquad (5)$$

Изобразим на рис. 2 векторы перемещений шайбы и доски относительно поверхности земли $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, а также покажем направление сил трения $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}'_{тр}$.

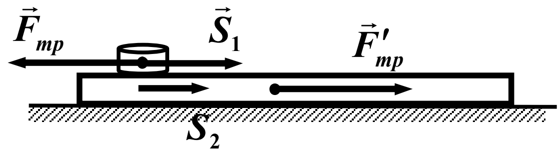


Рис. 2.

Используя понятие работы, выразим сумарную работу силы трения через перемещения

$$A_{тр} + A_{тр} = F_{тр}\cdot S_1\cdot\cos 180^0 + F'_{тр}\cdot S_2\cdot\cos 0^0 = -F_{тр}\cdot S_1 + F'_{тр}\cdot S_2. \qquad (5)$$

По третьему закону Ньютона, $F_{тр} = F'_{тр}$, а также $F_{тр} = \mu\cdot m\cdot g$. С учетом последнего соотношения, равенство (5) преобразуется к виду:

$$A_{тр} + A_{тр} = -\mu\cdot m\cdot g\cdot (S_1 - S_2). \qquad (6)$$

Очевидно, что разность перемещений шайбы и доски относительно поверхности Земли, равна перемещению шайбы относительно доски, т.е.

$$S_{12} = S_1 - S_2 \qquad (7)$$

Из равенства (7) вместо $S_1 - S_2$ подставим в равенство(6), получим следующее соотношение:

$$A_{тр} + A_{тр} = -\mu\cdot m\cdot g\cdot S_{12}. \qquad (9)$$

Приравняв правые части равенств (5) и (9), будем иметь искомое соотношение для вычисления перемещения шайбы относительно доски

$$-\mu\cdot m\cdot g\cdot S_{12} = -\frac{m\cdot M}{m+M}\cdot g\cdot h \Rightarrow S_{12} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{m\cdot M}{m+M}.$$

***Пример 21*[*].** *Три одинаковые заряженные частицы, каждая массой* m *и зарядом* q*, поместили в вершины углов равностороннего треугольника со стороной* a*. Затем частицы одновременно освободили, и они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найти: 1) скорость каждой частицы в зависимости от расстояния* r *между ними; 2) работу* A*, которую совершили кулоновские силы, действующие на каждую частицу при разлете их расстояние* r *друг от друга.*

Решение. 1. *На частицы рассматриваемые в данной задаче, дествуют только кулоновские силы. Эти силы являются консервативными. Поэтому мы можем использовать закон сохранения механической энергии. В начальный момент времени части, имею нулевую скорость, обладают только потенциальной энергией, т.е.:*

$$W_0 = 3 \cdot \frac{q \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a} = 3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a}, \qquad (1)$$

где ε_0 *– диэлектрическая постоянная.*

В том случае, когда расстояние между частицами равно r*, они обладают как кинетической, так и потенциальной энергией. Запишем выражение для полной механической энергии системы частиц в данный момент времени:*

$$W = 3 \cdot \frac{q \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} + 3 \cdot \frac{m \cdot V^2}{2} = 3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} + 3 \cdot \frac{m \cdot V^2}{2}. \qquad (2)$$

На основании закона сохранения механической энергии, приравняем правые части равенств (1) и (2), получим следующее соотношение:

$$3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a} = 3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} + 3 \cdot \frac{m \cdot V^2}{2}. \qquad (3)$$

Из последнего уравнения находим зависимость скорости частицы V *от расстояния между ними:*

$$V = \sqrt{\frac{q^2 \cdot (r - a)}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot r \cdot m}}. \qquad (4)$$

2. *Силы Кулона, действующие на рассматриваемую систему частиц, являются консервативными, поэтому работа этих сил, равна убыли потенциальной энергии, т.е.:*

$$A_3 = W_{p0} - W_p = 3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a} - 3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} = 3 \cdot \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right),$$

где W_{p0}, W_p *– начальная и конечная потенциальная энергия системы частиц.*

Работа, совершенная над одной частицей, соответственно равна:

$$A = \frac{A_3}{3} = \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right).$$

---

[*]Задача повышенной сложности

Варианты заданий для практических занятий

Вариант №1

⊕⊕ ***Задача №1.*** Струя воды сечением $S = 6\ см^2$ ударяется о стенку под углом $\alpha = 60^0$ к нормали и упруго отскакивает от стенки без потери скорости. Найти силу, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе $V = 12\ {}^{м}/_{с}$.

⊕⊕ ***Задача №2.*** Снаряд массой $10\ кг$ обладал скоростью $200\ {}^{м}/_{с}$ в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой $3\ кг$ получила скорость $400\ {}^{м}/_{с}$ и полетела вперед под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту. Найти, с какой скоростью и под каким углом к горизонту полетит большая часть снаряда.

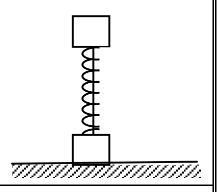
⊕⊕ ***Задача №3.*** Автомобиль массой $2000\ кг$ движется в гору. Уклон горы равен $4\ м$ на каждые $100\ м$ пути. Коэффициент трения равен $8\,\%$. Найти: 1) работу, совершенную двигателем автомобиля на пути $3\ км$; 2) мощность, развиваемую двигателем, если известно, что этот путь был пройден за $4\ мин$.

⊕⊕ ***Задача №4.*** Шар массой $m_1 = 200\ г$, движущийся со скоростью равной $10\ {}^{м}/_{с}$, ударяет неподвижный шар массой $m_2 = 800\ г$. Удар центральный, абсолютно упругий. Каковы будут скорости после удара шаров?

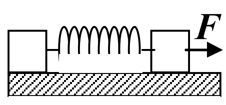
⊕⊕ ***Задача №5.*** Два груза массами $m_1 = 10\ кг$ и $m_2 = 15\ кг$ подвешены на нитях длиной $L = 2\ м$ так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60^0$ и отпущен. Определить высоту, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

⊕⊕⊕ ***Задача №6.*** Две одинаковые тележки движутся друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью V_0. На задней тележке находится человек массы m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью u относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

⊕⊕⊕ ***Задача №7.*** Система состоит из двух одинаковых кубиков, каждый массы m, между которыми находится сжатая невесомая пружина жесткости k. Кубики связаны нитью, которую в некоторый момент пережигают. При каких значениях Δl - начальном сжатии пружины - нижний кубик подскочит после пережигания нити?



⊕⊕⊕ ***Задача №8.*** На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска соединенные невесомой пружинкой жесткости k и длины l_0 в недеформированном состоянии. На один из брусков начали действовать с постоянной силой F. Найти максимальное расстояние между брусками в процессе их движения.



Вариант №2

⊕⊕ ***Задача №1.*** Молекула массой $\boldsymbol{m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}}$ ***кг***, летящая со скоростью $\boldsymbol{V = 600\ м/с}$ ударяется о стенку сосуда под углом $\boldsymbol{\alpha = 60^0}$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы, полученный стенкой за время удара.

⊕⊕ ***Задача №2.*** Граната, летящая со скоростью $\boldsymbol{10\ м/с}$, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла ***60%*** массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью, равной $\boldsymbol{25\ м/с}$. Найти скорость меньшего осколка.

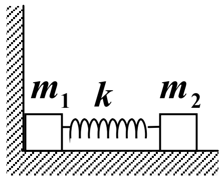
⊕⊕ ***Задача №3.*** Под действием постоянной силы вагонетка прошла путь $\boldsymbol{S = 5\ м}$ и приобрела скорость $\boldsymbol{V = 2\ м/с}$. Определить работу силы, если масса вагонетки равна $\boldsymbol{400\ кг}$ и коэффициент трения $\boldsymbol{\mu = 0{,}01}$.

⊕⊕ ***Задача №4.*** Движущееся тело массой $\boldsymbol{m_1}$ ударяется о неподвижное тело массой $\boldsymbol{m_2}$. Чему должно равняться отношение масс, чтобы при центральном упругом ударе скорость первого тела уменьшилась в **1,5** раза? С какой кинетической энергией начнет двигаться при этом второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела равна $\boldsymbol{1\ кДж}$?

⊕⊕ ***Задача №5.*** Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $\boldsymbol{m_1 = 5\ г}$ и масса шара $\boldsymbol{m_2 = 0{,}5\ кг}$. Скорость пули $\boldsymbol{V_1 = 500\ м/с}$. При какой предельной длине стержня (расстоянии от точки подвеса до центра шара) шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

⊕⊕⊕ ***Задача №6.*** На краю покоящейся тележки массы $\boldsymbol{M}$ стоят два человека, масса каждого из которых равна $\boldsymbol{m}$. Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью $\boldsymbol{u}$ относительно тележки: а) одновременно; б) друг за другом. В каком случае скорость тележки будет больше и во сколько раз?

⊕⊕⊕ ***Задача №7.*** На гладкой горизонтальной плоскости находятся два бруска с массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$, соединенной невесомой пружиной жесткостью $\boldsymbol{k}$. Брусок 2 переместили влево на небольшое расстояние $\boldsymbol{\Delta x}$ и отпустили. Найти скорость центра масс системы после отрыва бруска 1 от стенки.



⊕⊕⊕ ***Задача №8.*** Два бруска с массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$, соединенные недеформированной легкой пружинкой, лежат на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен $\boldsymbol{\mu}$. Какую минимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску с массой $\boldsymbol{m_1}$, чтобы другой брусок сдвинулся с места?