

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§4.1. Момент силы, момент импульса, момент инерции

При изучении закономерностей поступательного движения твердого тела* было установлено, что основным уравнением, описывающим данный тип движения, является *второй закон Ньютона*. Установлено: характеристики движения тела зависят как от выбора систем отсчета, так и от интенсивности взаимодействия тела с окружающими его телами (в инерциальных системах отсчета характеристики движения определяются только взаимодействием). Для измерения *интенсивности* взаимодействий использовали величину, называемую *силой*, а *инертность* при поступательных движениях оценивали *массой* тела. Оказывается, для вращательных движений результат взаимодействия зависит как от силы и ее направления, так и от точки приложения. В сказанном нетрудно убедиться на следующем примере: если два человека прикладывают одинаковые усилия перпендикулярно двери, то она будет вращаться в направлении той силы, точка приложения которой наиболее

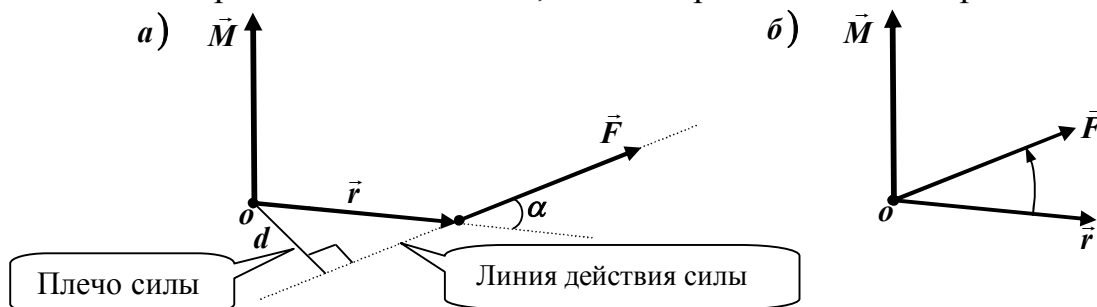


Рис. 4.1

удалена от оси вращения. Для вращательных движений мерой взаимодействия является *момент силы*.

Рассмотрим понятие момента силы \vec{F} относительно некоторой точки O . Построим вектор силы \vec{F} и ее линию действия (пунктирная линия на рис. 4.1.a). Проведем перпендикуляр из точки O к линии действия силы, величину которого обозначим d и назовем его *плечом силы*. **Величиной момента силы относительно точки O называется произведение величины силы на ее плечо, т.е.:**

$$M = |\vec{F}| \cdot d. \quad (4.1)$$

Единицы измерения момента силы в системе СИ– $H \cdot m$.

Для того, чтобы в дальнейшем интенсивно использовать аппарат векторной алгебры, введем понятие вектора момента силы.

* **АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО** – модельное понятие классической механики, обозначающее совокупность материальных точек, расстояния между которыми сохраняются в процессе любых движений, совершаемых этим телом.

Проведем из точки O в точку приложения силы \vec{F} радиус-вектор \vec{r} , и назовем его радиус-вектор силы. Из рис. 4.1.а видно, что:

$$d = |\vec{r}| \cdot \sin \alpha. \quad (4.2)$$

С учетом соотношения (4.2), равенство (4.1) примет вид:

$$M = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha. \quad (4.3)$$

Последнее соотношение позволяет записать для вектора момента силы \vec{M} следующее равенство:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.4)$$

Порядок перемножения векторов $\vec{r} \times \vec{F}$ выбирают из соображений так, чтобы векторы $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ образовывали правую тройку векторов (см. рис. 4.1.б). Направление вектора момента силы \vec{M} относительно точки O определяется по правилу «буравчика». Вращаем буравчик от вектора \vec{r} к вектору \vec{F} , тогда его поступательное движение указывает на направление вектора момента силы \vec{M} . Важно помнить, что направление вектора \vec{M} всегда перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \vec{r} и \vec{F} , или $\vec{M} \perp \vec{r}$ и $\vec{M} \perp \vec{F}$.

Если радиус-вектор силы задан в декартовой системе координат соотношением

$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k},$$

а сам вектор силы как $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$, ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора прямоугольной декартовой системы координат) то вектор момента силы находится следующим образом:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (r_y \cdot F_z - r_z \cdot F_y) \cdot \vec{i} + (r_z \cdot F_x - r_x \cdot F_z) \cdot \vec{j} + (r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x) \cdot \vec{k} \quad (4.4.a)$$

Кроме вектора момента силы, в динамике твердого тела часто пользуются проекцией этого вектора на некоторую ось OZ , иначе эту величину называют моментом силы относительно оси. Выберем точку O и построим векторы \vec{r} и \vec{F} так, как показано на рис. 4.2.

Из точки O построим вектор момента силы \vec{M} , относительно этой точки. Выберем произвольно ось OZ (см. рис. 4.2), и проведем перпендикуляр из конца вектора \vec{M} на ось OZ , получим составляющую вектора \vec{M}_z по оси.

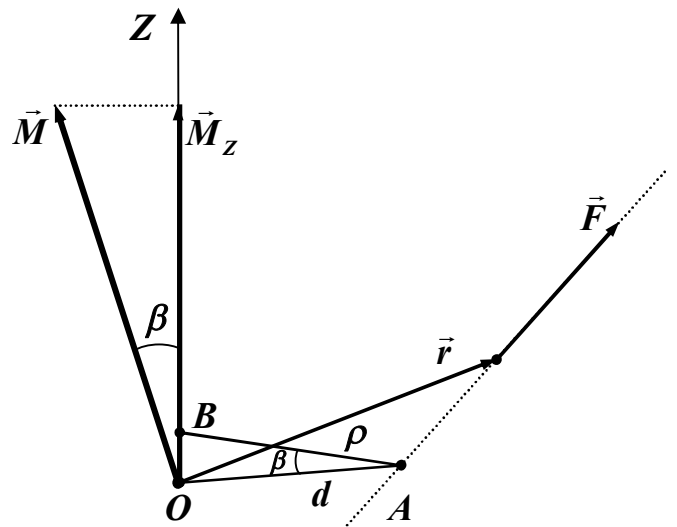


Рис. 4.2.

Кроме того, построим плечо силы d и отрезок, перпендикулярный оси OZ и линии действия силы \vec{F} , величину которого обозначим ρ и назовем плечом силы \vec{F} относительно оси OZ .

Из рис. 4.2 видно, что длина составляющей \vec{M}_Z связана с длиной вектора \vec{M} следующим соотношением $|\vec{M}_Z| = |\vec{M}| \cdot \cos \beta = |\vec{F}| \cdot d \cdot \cos \beta$, но $d \cdot \cos \beta = \rho$. Подставляя из последнего равенства $d \cdot \cos \beta$ в предыдущее, имеем следующее соотношение для проекции момента силы на ось OZ :

$$\boxed{|\vec{M}_Z| = |\vec{F}| \cdot \rho}. \quad (4.5)$$

Таким образом, величина проекции момента силы на ось OZ (момент силы относительно оси OZ) равна произведению величины силы на ее плечо относительно оси OZ .

Важно помнить, что последнее соотношение позволяет находить только величину проекции вектора \vec{M} на ось OZ . Знак проекции определяется по рисунку. Кроме того, если вектор силы параллелен оси OZ , или ось OZ лежит в плоскости векторов \vec{r} и \vec{F} , то проекция вектора \vec{M} на эту ось равна нулю.

Важной характеристикой динамики твердого тела является момент импульса. Введем понятие момента импульса материальной точки относительно заданной точки O .

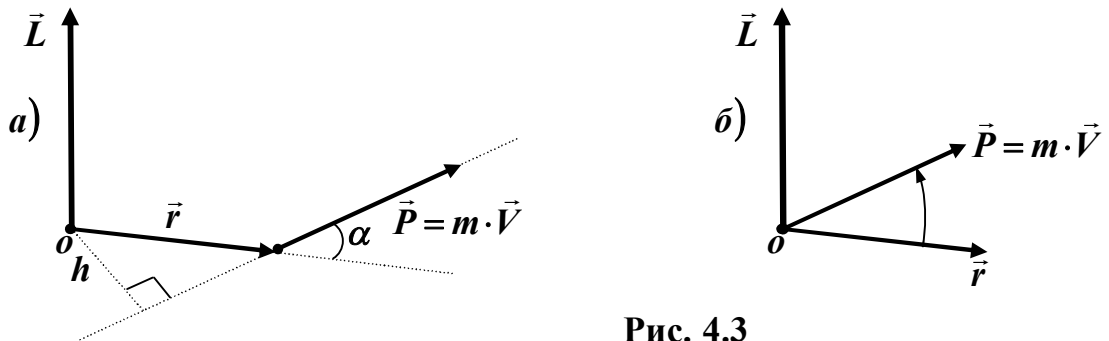


Рис. 4.3

Рассуждая также, как делали при построении момента вектора силы, построим вектор момента импульса (см. рис. 4.3.a), где h – перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия вектора импульса есть плечо этого вектора относительно точки O .

Вектор момента импульса \vec{L} материальной точки относительно заданной точки O равен векторному произведению радиус-вектора, проведенного из точки O в точку приложения импульса на вектор импульса, т.е.:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{V})}. \quad (4.6)$$

Единицы измерения вектора момента импульса в системе СИ – $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Векторы \vec{r} , \vec{P} , \vec{L} образуют правую тройку векторов (см. рис. 4.3.б). Направление вектора момента импульса \vec{L} относительно точки O определяется

по правилу «буравчика». При вращении буравчика от вектора \vec{r} к вектору \vec{P} , его поступательное движение укажет на направление вектора момента импульса \vec{L} .

Важно помнить, что направление вектора \vec{L} всегда перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \vec{r} и \vec{P} , или $\vec{L} \perp \vec{r}$ и $\vec{L} \perp \vec{P}$.

Если радиус–вектор импульса задан в декартовой системе координат соотношением $\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$, а сам вектор импульса как–
 $\vec{P} = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k}$, то вектор момента импульса находится из соотношения:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (r_y \cdot P_z - r_z \cdot P_y) \cdot \vec{i} + (r_z \cdot P_x - r_x \cdot P_z) \cdot \vec{j} + (r_x \cdot P_y - r_y \cdot P_x) \cdot \vec{k} \quad (4.6.a)$$

Величина вектора момента импульса материальной точки $|\vec{L}|$ равна произведению величины вектора импульса \vec{P} на его плечо, т.е.:

$$|\vec{L}| = |\vec{P}| \cdot h = m \cdot |\vec{V}| \cdot h. \quad (4.7)$$

Величина проекции момента импульса на ось OZ (момент импульса относительно оси OZ) равна произведению величины импульса материальной точки на его плечо* относительно оси.

Важно помнить, что последнее определение позволяет находить только величину проекции вектора \vec{L} на ось OZ . Кроме того, если вектор импульса параллелен оси OZ , или ось OZ лежит в плоскости векторов \vec{r} и \vec{P} , то проекция вектора \vec{L} на эту ось равна нулю.

Введем понятие вектора момента импульса твердого тела. Момент импульса, как и большинство физических величин, является величиной *аддитивной**. Возьмем твердое тело и разобьем его на бесконечно малые части, такие, что размер части пренебрежимо мал по сравнению с размерами твердого тела. Определим момент импульса каждой части ($\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$). Момент импульса всего тела равен при этом сумме моментов всех его частей, т.е.:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (4.8)$$

Таким образом мы ввели понятие величины, которая является аналогом вектора импульса твердого тела для поступательного движения.

* Расстояние от линии действия вектора импульса материальной точки до оси OZ).

* Аддитивность (от лат. additio — прибавление) — свойство величин, заключающееся в том, что сумма значений величин, соответствующих частям объекта, равна значению величины, соответствующей целому объекту.

Для поступательных движений тел мерой инертности* является масса. Способность тел сохранять состояние равномерного вращения в отсутствие моментов внешних сил зависит не только от их массы, но и от конфигурации этих тел. Очевидно, что из двух маховиков с равными массами, маховик, имеющий больший радиус, обладает большей способностью сохранять равномерное вращательное движение. Для этих целей вводится понятие *момента инерции*.

Введем в начале понятие момента инерции материальной точки относительно заданной точки O и оси OZ . Выберем материальную точку массой m . Проведем из заданной точки O радиус-вектор \vec{r} в данную точку, расстояние от нее до оси OZ обозначим через ρ (см. рис. 3.4).

Моментом инерции материальной точки относительно выбранной точки O называется величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от нее до точки O , т.е.

$$\boxed{J_O = m \cdot r^2}. \quad (4.9)$$

Моментом инерции материальной точки относительно оси OZ называется величина, равная произведению массы точки на квадрат расстояния от материальной точки до оси OZ , т.е.

$$\boxed{J_Z = m \cdot \rho^2}. \quad (4.10)$$

Единицы измерения момента инерции в системе СИ – $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Введем понятия момента инерции твердого тела, используем для этого свойство аддитивности этой величины. Разобьем твердое тело на n бесконечно малых частей, найдем момент инерции каждой части относительно точки O ($\Delta m_i \cdot r_i^2$). **Момент инерции твердого тела относительно точки O равен сумме моментов инерции бесконечно малых его частей, т.е.:**

$$\boxed{J_O = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2}. \quad (4.11)$$

Момент инерции твердого тела относительно оси OZ равен сумме произведений масс бесконечно малых частей на квадрат расстояний от данных частей до оси OZ , т.е.:

$$\boxed{J_Z = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \rho_i^2}. \quad (4.12)$$

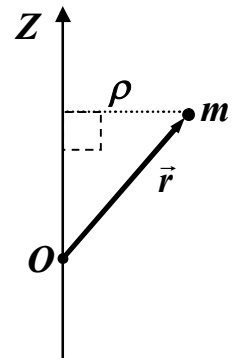


Рис. 4.4

* ИНЕРТНОСТЬ (инерция) в механике, свойство тела сохранять состояние равномерного прямолинейного движения или покоя, когда действующие на него силы отсутствуют или взаимно уравновешены.

Чем точнее мы хотим оценить момент инерции тела с помощью указанных сумм, тем большее число бесконечно малых частей мы должны брать, поэтому точные значения моментов инерций твердого тела относительно точки O и оси OZ будут совпадать с пределами от правых частей равенств (4.10) и (4.11) при условии, что $\Delta m \rightarrow 0$, т.е.:

$$J_O = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 \right) = \int r^2 \cdot dm, \quad J_Z = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \rho_i^2 \right) = \int \rho^2 \cdot dm. \quad (4.12a)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие характеристики вращательного движения аналогичны вектору силы и вектору импульса при поступательном движении?
2. Что называется плечом вектора силы относительно точки?
3. Что называется плечом вектора силы относительно оси?
4. Дайте определение вектора момента силы относительно точки. Как вычисляется проекция момента силы на ось (величина момента силы относительно оси)?
5. В каких единицах в системе СИ измеряется момент силы?
6. Как определяется направление вектора момента силы? В каких случаях его величина равна нулю?
7. Зная, что радиус-вектор силы задан выражением $\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$, и сам вектор силы как $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$, запишите соотношение, по которому можно рассчитать вектор момента силы.
8. Что называется плечом вектора импульса относительно точки?
9. Что называется плечом вектора импульса относительно оси?
10. Дайте определение вектора момента импульса материальной точки относительно заданной точки. Как вычисляется проекция момента импульса материальной точки на ось (величина момента импульса относительно оси)?
11. В каких единицах в системе СИ измеряется момент силы?
12. Как определяется направление вектора момента импульса? В каких случаях его величина равна нулю?
13. Зная, что радиус-вектор импульса задан как $\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$, и сам вектор силы как $\vec{P} = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k}$, запишите соотношение, по которому можно рассчитать вектор момента импульса материальной точки.
14. Что понимается под свойством аддитивности?

15. Дайте определение вектора момента импульса твердого тела. Как вычисляется величина проекции момента импульса тела на ось (момент импульса относительно оси)?
16. В каких единицах в системе СИ измеряется момент импульса?
17. Что называется моментом инерции материальной точки относительно некоторой точки?
18. Дайте определение момента инерции материальной точки относительно заданной оси.
19. Сформулируйте определение момента инерции твердого тела относительно точки.
20. Как находится момент инерции тела относительно оси?

Примеры решения задач

Пример 1. Дано очень тонкое кольцо, масса которого m и радиус R . Найдите моменты инерции относительно оси OX , расположенной в плоскости кольца и проходящей через его центр.

Решение. Для вычисления момента инерции очень тонкого кольца воспользуемся соотношением (4.12а). Для этого кольцо разобьем на бесконечно малые части длиной dl и массой dm .

Введем линейную плотность кольца $d\lambda$. Выразим массу бесконечно малого участка через длину и его линейную плотность, получим следующее выражение:

$$dm = \lambda \cdot dl. \quad (1)$$

Длина участка dl является дугой окружности радиусом R , поэтому ее величина связана с бесконечно малым углом соотношением

$$dl = R \cdot d\alpha. \quad (2)$$

Из равенства (2) вместо dl подставим в равенство (1), получим выражение:

$$dm = \lambda \cdot R \cdot d\alpha. \quad (4)$$

Обозначим расстояние от бесконечно малого участка до оси OX через r , и выразим его через радиус кольца

$$r = R \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

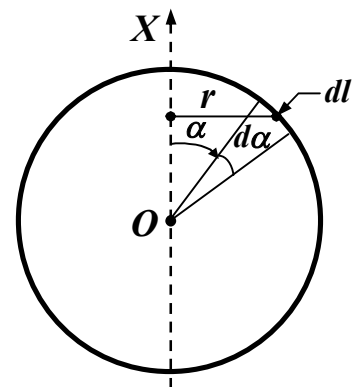
Запишем соотношение (4.12а) для момента инерции кольца относительно оси OX

$$J = \int r^2 \cdot dm. \quad (6)$$

Из равенств (4) и (5) вместо dm и r подставим в равенство (6) получим

$$J = \int_0^{2\pi} (R \cdot \sin \alpha)^2 \cdot \lambda \cdot R \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \lambda \cdot R^3 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot R^3 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} \dots$$

Подставим пределы интегрирования, получим выражение для момента инерции кольца



$$J = \lambda \cdot \pi \cdot R^3. \quad (7)$$

Выразим линейную плотность кольца λ через его массу m и длину $2 \cdot \pi \cdot R$, будем иметь выражение

$$\lambda = \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot R}. \quad (8)$$

Из равенства (8) вместо линейной плотности λ подставим в равенство (7), получим окончательную формулу для момента инерции кольца относительно оси OZ

$$J = 0,5 \cdot m \cdot R^2.$$

Пример 2*. Радиус-вектор силы задан в виде $\vec{r} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$, а вектор силы – $\vec{F} = 5 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k}$. Найти: 1) вектор момента силы и проверить правильность расчетов; 2) модуль вектора момента силы; 3) угол между вектором момента силы и осью OZ ; 4) плечо вектора момента силы относительно оси OZ .

Решение. Для определения вектора момента силы используем соотношение (4.4.a):

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & -6 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-6) - 3 \cdot 4) \cdot \vec{i} + (4 \cdot 5 - 2 \cdot (-6)) \cdot \vec{j} + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 5) \cdot \vec{k} = \\ &= -30 \cdot \vec{i} + 32 \cdot \vec{j} - 9 \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Зная, что вектор момента силы перпендикулярен векторам \vec{r} и \vec{F} , проверим ортогональность векторов, например \vec{r} и \vec{M} , т.е. вычислим их скалярное произведение, т.е.:

$$\vec{r} \cdot \vec{M} = r_x \cdot M_x + r_y \cdot M_y + r_z \cdot M_z = 2 \cdot (-30) + 3 \cdot 32 + 4 \cdot (-9) = 0.$$

Т.к. скалярное произведение векторов \vec{r} и \vec{M} равно нулю, то $\vec{M} \perp \vec{r}$. Это значит, что вектор \vec{M} найден правильно.

Для вектора момента силы имеем выражение $\vec{M} = -30 \cdot \vec{i} + 32 \cdot \vec{j} - 9 \cdot \vec{k}$.

Величину момента силы находим из известного математического равенства

$$|\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-30)^2 + 32^2 + (-9)^2} = \sqrt{2005} = 44,78 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Найдем угол между вектором момента силы и осью OZ по его проекции на эту ось,

$$\text{т.е.: } M_z = |\vec{M}| \cdot \cos \gamma \Rightarrow \gamma = \arccos \left(\frac{M_z}{|\vec{M}|} \right) = \arccos \left(\frac{-30}{44,78} \right) = 132^\circ.$$

Плечо вектора момента силы относительно оси OZ находим из равенства

$$|\vec{M}_z| = |\vec{F}| \cdot \rho \Rightarrow \rho = \frac{|\vec{M}_z|}{|\vec{F}|} = \frac{|\vec{M}_z|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \frac{|-30|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 0,43 \text{ м}.$$

*Задача повышенной сложности

Пример 3*. Радиус-вектор силы, выходящей из точки O , задан $\vec{r} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$, а вектор импульса $\vec{P} = -3 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k}$. Найти: 1) вектор момента импульса; 2) величину момента импульса; 3) плечо вектора момента импульса относительно точки O 3) проверить ортогональность (перпендикулярность) векторов \vec{r} , \vec{L} и \vec{P} , \vec{L} .

Решение. Вектор момента импульса находим из соотношения (6.6.a)

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (3 \cdot (-4) - 4 \cdot 5) \cdot \vec{i} + (4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4)) \cdot \vec{j} + (2 \cdot 5 - 3 \cdot (-3)) \cdot \vec{k} = -32 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 19 \cdot \vec{k}.$$

Величину момента импульса определяем через его проекции на оси координат по известной формуле

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{(-32)^2 + (-4)^2 + (19)^2} = \sqrt{1401} = 37,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}.$$

Зная, что величина момента импульса относительно точки равна произведению величины вектора импульса на его плечо относительно точки O , находим плечо вектора момента импульса из равенства (4.7)

$$h = \frac{|\vec{L}|}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{L}|}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{37,4}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-4)^2}} = 5,3 \text{ м}.$$

Известно, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю. Используя этот факт, проверим ортогональность векторов \vec{r} , \vec{L} и \vec{P} , \vec{L} , для чего найдем их скалярные произведения

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = r_x \cdot L_x + r_y \cdot L_y + r_z \cdot L_z = 2 \cdot (-32) + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 19 = 0.$$

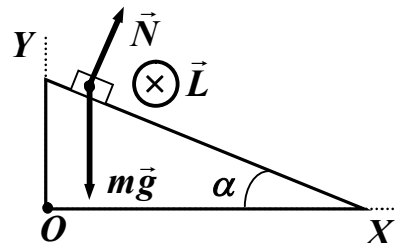
$$\vec{P} \cdot \vec{L} = P_x \cdot L_x + P_y \cdot L_y + P_z \cdot L_z = (-3) \cdot (-32) + 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot 19 = 0.$$

Таким образом скалярные произведения соответствующих пар векторов равны нулю, то \vec{r} , \vec{L} и \vec{P} , \vec{L} являются ортогональными векторами.

* Задача повышенной сложности.

Пример 4*. Небольшая шайба массой $m = 0,050$ кг начинает скользить с вершины гладкой наклонной плоскости, высота которой $h = 1$ м, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 15^\circ$ (см. рис.) Найдите величину момента импульса шайбы относительно оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, через $t = 1,3$ с после начала движения.

Решение. Определим вначале величину вектора ускорения, для чего запишем второй закон Ньютона в векторном виде $m \cdot \vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Спроектируем это равенство на ось, направленную вдоль направления движения шайбы, получим соотношение $m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha$. Делим обе части равенства на массу шайбы, находим величину ускорения $a = g \cdot \sin \alpha$.



Заметим, что вектор ускорения направлен по направлению движения шайбы. Найдём проекции вектора импульса шайбы на оси координат, учитывая при этом, что начальная скорость шайбы равна нулю.

$$P_x = m \cdot V_x = m \cdot a \cdot (\cos \alpha) \cdot t = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t,$$

$$P_y = m \cdot V_y = -m \cdot a \cdot (\sin \alpha) \cdot t = -m \cdot g \cdot \sin^2 \alpha \cdot t,$$

$$P_z = 0.$$

Записываем уравнения движения шайбы по осям координат OX , OY и OZ

$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} = 0 + 0 \cdot t + \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t^2}{2} = \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t^2}{2},$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} = h + 0 \cdot t + \frac{-g \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot t^2}{2} = h - \frac{g \cdot \sin^2 \alpha \cdot t^2}{2},$$

$$z(t) = z_0 + V_{0z} \cdot t + \frac{a_z \cdot t^2}{2} = 0 + 0 \cdot t + \frac{0 \cdot t^2}{2} = 0.$$

Вычисляем вектор момента импульса из соотношения (4.6.a)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t^2}{2} & h - \frac{g \cdot \sin^2 \alpha \cdot t^2}{2} & 0 \\ m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t & -m \cdot g \cdot \sin^2 \alpha \cdot t & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left[\frac{g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t^2}{2} \cdot (-m \cdot g \cdot \sin^2 \alpha \cdot t) - m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t \cdot \left(h - \frac{g \cdot \sin^2 \alpha \cdot t^2}{2} \right) \right] \cdot \vec{k} = \\ &= -h \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t \cdot \vec{k}. \\ \vec{L} &= -h \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем вектор момента импульса, направленный против оси OZ . На рисунке вектор \vec{L} направлен перпендикулярно его плоскости от нас. Величина вектора момента импульса равна

$$|\vec{L}| = h \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot t = 1 \cdot 0,05 \cdot 9,81 \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot 1,3 = 0,159 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}.$$

*Задача повышенной сложности.

§4.2. Взаимосвязь моментов инерций тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей и момента инерции относительно их точки пересечения. Теорема Штейнера–Гюйгенса

Решение многих физических задач значительно упрощается, если пользоваться следующим утверждением: **сумма моментов инерций твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей OX , OY , OZ , пересекающихся в точке O , равна удвоенному моменту инерции этого тела относительно точки пересечения O , т.е.:**

$$\boxed{J_X + J_Y + J_Z = 2 \cdot J_O} \quad (4.13)$$

Докажем это утверждение. Поместим начало координат прямоугольной

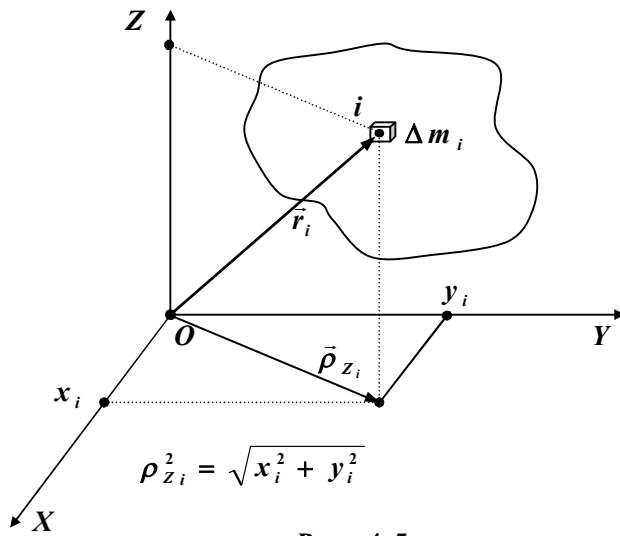


Рис . 4.5

декартовой системы в точку O . Выберем произвольное тело, и разобьем его на n бесконечно малых частей. Радиус-вектор i -той части обозначим \vec{r}_i , координаты данной части обозначим x_i, y_i, z_i . Из рисунка 4.5 видно, что квадрат радиус-вектора i -той части равен $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, а квадраты расстояний i -той части до осей OX, OY, OZ соответственно равны

$$\begin{aligned} \rho_{X_i}^2 &= y_i^2 + z_i^2, & \rho_{Y_i}^2 &= x_i^2 + z_i^2, \\ \rho_{Z_i}^2 &= x_i^2 + y_i^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Запишем моменты инерций тела относительно осей OX, OY, OZ и их точки пересечения O

$$J_X = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \rho_{X_i}^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2), \quad (4.15)$$

$$J_Y = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \rho_{Y_i}^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2), \quad (4.16)$$

$$J_Z = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \rho_{Z_i}^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2), \quad (4.17)$$

$$J_O = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad (4.18)$$

Сложим равенства (4.15)–(4.17), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
J_X + J_Y + J_Z &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) + \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) + \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \\
&= \sum_{i=1}^n [\Delta m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) + \Delta m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) + \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)] = \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot [(y_i^2 + z_i^2) + (x_i^2 + z_i^2) + (x_i^2 + y_i^2)]
\end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые в последнем соотношении, получим равенство

$$\begin{aligned}
J_X + J_Y + J_Z &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot 2 \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 = 2 \cdot J_O.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Следует заметить, что доказанное утверждение редко встречается в учебных материалах по физике. Однако, использование этой теоремы значительно упрощает решение многих задач.

Физический смысл этой теоремы заключается в том, что сумма моментов инерции твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей пересекающихся в одной точке не зависит от направления этих осей по отношению к выбранному телу, а зависит только от расположения их точки пересечения.

Вычисление момента инерции твердого тела произвольной формы относительно некоторой оси в большинстве случаев представляет довольно сложную задачу. Однако, в том случае, когда известен момент инерции этого тела относительно оси проходящей через центр масс и параллельной заданной оси, задача значительно упрощается.

Для этого используют *теорему Штейнера–Гюйгенса*: момент инерции J тела относительно произвольной оси O_2Z_2 равен моменту инерции J_C относительно оси O_1Z_1 , параллельной данной и проходящей через центр масс тела (точка C), плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния d между осями:

$$\boxed{J = J_C + m \cdot d^2} \quad (4.19)$$

Теорема Штейнера–Гюйгенса широко используется как в физике, так и в теоретической механике и решении задач по сопротивлению материалов.

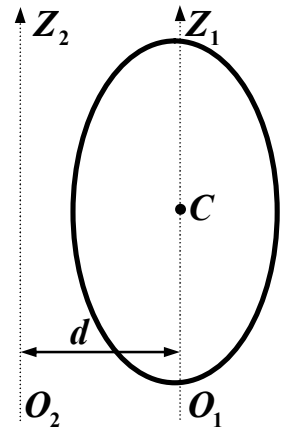


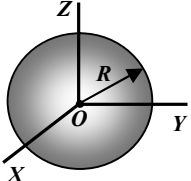
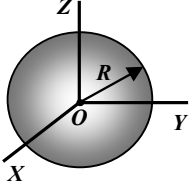
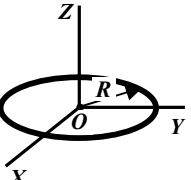
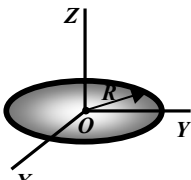
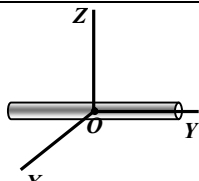
Рис. 4.6

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте утверждение о взаимосвязи моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей и момента инерции тела относительно точки пересечения этих осей.
2. Сформулируйте и докажите теорему Штейнера–Гюйгенса.
3. В каких целях теорема Штейнера–Гюйгенса обычно используется?
4. Дайте определение центра масс, и приведите формулы для вычисления координат точки центра масс.

Таблица 4.1

Формулы моментов инерции некоторых тел

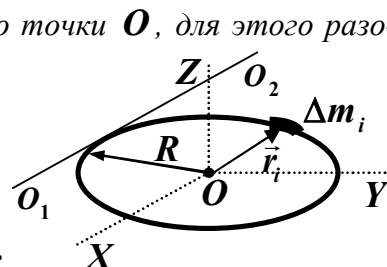
Момент инерции сферы	
	$I_o = m \cdot R^2$
	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2$
Момент инерции шара	
	$I_o = \frac{3}{5} \cdot m \cdot R^2$
	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$
Момент инерции тонкого кольца	
	$I_o = m \cdot R^2$
	$I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2, \quad I_z = m \cdot R^2$
Момент инерции тонкого диска	
	$I_o = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
	$I_x = I_y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot R^2, \quad I_z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
Момент инерции тонкого стержня	
	$I_o = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2$
	$I_x = I_z = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2, \quad I_y = 0$

Примеры решения задач

Пример 5. Дано очень тонкое кольцо, масса которого m и радиус R . Найти: 1) момент инерции кольца относительно его центра; 2) моменты инерции относительно осей OX, OY, OZ (см. рис. к задаче); 3) момент инерции кольца относительно оси O_1O_2 , которая является его касательной.

Решение. Найдем момент инерции кольца относительно точки O , для этого разобьем его на бесконечно малые части. Учтем, что для всех частей кольца расстояние до точки O одинаково и равно R . Запишем выражение для момента инерции твердого тела относительно точки O

$$J_O = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot R^2 = R^2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta m_i = m \cdot R^2.$$



Важно помнить, что вышеприведенное соотношение справедливо для бесконечно тонкого кольца. Из рисунка видно, расстояние от оси OZ до всех бесконечно малых частей одинаково, и равно R , поэтому момент инерции кольца относительно этой оси равен моменту инерции его относительно точки O , т.е. $J_Z = J_O = m \cdot R^2$.

Запишем соотношение (4.13), учтем при этом предыдущее соотношение, получим следующее выражение:

$$J_x + J_y + J_z = 2 \cdot J_O \Rightarrow J_x + J_y + m \cdot R^2 = 2 \cdot m \cdot R^2 \Rightarrow J_x + J_y = m \cdot R^2.$$

Т.к. кольцо симметрично относительно осей OX и OY , то моменты инерции его относительно этих осей одинаковы $J_x = J_y$. С учетом этого, предыдущее равенство приводит к следующему результату:

$$J_x = J_y = \frac{m \cdot R^2}{2}.$$

Выберем ось O_1O_2 , которая является касательной к кольцу и параллельна оси OX (см. рис. к задаче). Найдем момент инерции кольца относительно этой оси по теореме Штейнера–Гюйгенса

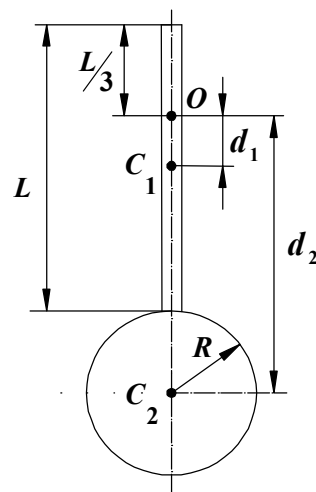
$$J_{O_1O_2} = J_x + m \cdot R^2 = \frac{m \cdot R^2}{2} + m \cdot R^2 = \frac{3 \cdot m \cdot R^2}{2} \Rightarrow J_{O_1O_2} = \frac{3 \cdot m \cdot R^2}{2}.$$

Пример 6. Физический маятник представляет собой стержень длиной $L = 1$ м и массой $m_1 = 1$ кг с прикрепленным к одному из его концов диском массой $m_2 = 0,5$ кг и радиусом $R = 0,25$ м. Определить момент инерции J_Z такого маятника относительно оси OZ , проходящей через точку O на стержне перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис.).

Решение. Общий момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_{z1} и диска J_{z2} :

$$J_z = J_{z1} + J_{z2}. \quad (1)$$

Формулы, по которым вычисляются моменты инерции стержня J_{C1} и диска J_{C2} относительно осей, проходящих через их центры масс, даны в табл. см. выше. Чтобы определить моменты инерции J_{z1} и J_{z2} , надо воспользоваться теоремой Штейнера–Гюйгенса:



$$J = J_C + m \cdot d^2. \quad (2)$$

Выразим момент инерции стержня согласно формуле (2):

$$J_{z1} = \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot L^2 + m_1 \cdot d_1^2.$$

Расстояние d_1 между осью OZ и параллельной ей осью, проходящей через центр масс C_1 стержня, как следует из рис., равно $d_1 = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}l$. С учетом этого запишем

$$J_{z1} = \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot L^2 + m_1 \cdot \left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot m_1 \cdot L^2.$$

Момент инерции диска в соответствии с формулой (2) равен

$$J_{z2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot d_2^2.$$

Расстояние d_2 между осью OZ и параллельной ей осью, проходящей через центр масс диска, равно (см. рис.) $d_2 = d_1 + \frac{L}{2} + R = \frac{L}{6} + \frac{L}{2} + R = \frac{2}{3} \cdot L + R$. С учетом этого запишем

$$J_{z2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L + R\right)^2.$$

Подставив полученные выражения J_{z1} и J_{z2} в формулу (1), найдем

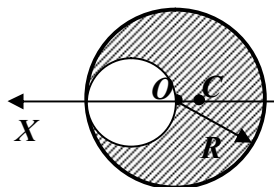
$$J_z = \frac{1}{9} \cdot m_1 \cdot L^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L + R\right)^2.$$

Произведя вычисления, получим значение момента инерции физического маятника относительно оси OZ : $J_z = 0,547 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Пример 7*. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез (см. рис.). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m . Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр масс.

Решение.

Обозначим массу диска без выреза M , массу вырезанного диска m_1 и его радиус r_1 .



Учтем что $r_1 = \frac{R}{2}$. Найдем поверхностную плотность диска с вырезом

$$\sigma = \frac{m}{S - S_1} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r_1^2} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 - \pi \cdot (0,5 \cdot R)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{m}{\pi \cdot R^2},$$

где S — площадь диска без выреза, S_1 — площадь выреза.

*Задача повышенной сложности

Найдем массу диска без выреза и массу выреза

$$M = \sigma \cdot S = \frac{4}{3} \cdot \frac{m}{\pi \cdot R^2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{4}{3} \cdot m,$$

$$m_1 = \sigma \cdot S_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{m}{\pi \cdot R^2} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{4} = \frac{1}{3} \cdot m.$$

Введем обозначения: x_0 — координата центра масс диска без выреза; x_2 — координата центра масс диска с вырезом; x_1 — координата центра масс вырезанного диска. Запишем соотношение для координаты центра масс диска без выреза

$$x_0 = \frac{m_1 \cdot x_1 + m \cdot x_2}{M}.$$

Из рисунка видно, что $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{R}{2}$. С учетом этого предыдущее выражение примет вид

$$m_1 \cdot \frac{R}{2} + m \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{R}{2} \cdot \frac{m_1}{m} = -\frac{R}{2} \cdot \frac{m/3}{m} = -\frac{R}{6}.$$

Центр масс диска с вырезом находится справа от точки O на расстоянии $\frac{R}{6}$.

Момент инерции диска без выреза относительно точки C находим по теореме Штейнера–Гюйгенса

$$J_0 = \frac{M \cdot R^2}{2} + M \cdot d^2 = \frac{M \cdot R^2}{2} + M \cdot \left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{19}{36} \cdot \frac{4}{3} \cdot m \cdot R^2 = \frac{19}{27} \cdot m \cdot R^2.$$

Находим момент инерции вырезанного диска относительно точки C по теореме Штейнера–Гюйгенса

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2} + m_1 \cdot d_1^2 = \frac{m_1 \cdot (0,5 \cdot R)^2}{2} + m_1 \cdot \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{6}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{8} \cdot m_1 \cdot R^2 + \frac{4}{9} m_1 \cdot R^2 = \frac{17}{72} \cdot m_1 \cdot R^2 = \frac{41}{72} \cdot \frac{1}{3} m \cdot R^2 = \frac{41}{216} \cdot m \cdot R^2. \end{aligned}$$

Момент инерции кольца с вырезом равен разности момента инерции диска без выреза и самого выреза, т.е.

$$J_2 = J_0 - J_1 = \frac{19}{27} \cdot m \cdot R^2 - \frac{41}{216} \cdot m \cdot R^2 = \frac{37}{72} \cdot m \cdot R^2.$$

§4.3. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

Выясним, какая механическая величина вызывает изменение момента импульса материальной точки. Возьмем выражение для момента импульса (4.6) и продифференцируем его по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (4.20)$$

По второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Векторы скорости и импульса направлены в одну сторону, следовательно, их векторное произведение равно нулю $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$. С учетом этого соотношение (4.20) примет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (4.21)$$

где \vec{F} – равнодействующая всех сил, $\vec{r} \times \vec{F}$ – суммарный момент всех сил, действующих на материальную точку.

Перепишем равенство (4.21) в виде

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) называется *уравнением моментов для материальной точки*. Оно гласит: **производная от момента импульса материальной точки относительно заданной точки O , равна сумме моментов всех сил, действующих на материальную точку.**

Важно помнить, что если система отсчета является неинерциальной, то, кроме моментов сил взаимодействия, необходимо включить в соотношение (4.22) моменты сил инерции относительно той же точки O .

Выясним, при каких условиях сохраняется момент импульса материальной точки. Из уравнения моментов (4.22) видно, если результирующий момент силы относительно некоторой точки O равен нулю ($\vec{M} = \vec{0}$), то производная от момента импульса также равна нулю ($\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$). Это значит, что относительно этой точки O момент импульса будет постоянным вектором, т.е. $\vec{L} = \text{const}$.

Условие равенства моментов сил выполняется для таких сил, которые являются *центральными**

Полученный вывод продемонстрируем на следующем примере. Пусть спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите (рис. 4.7). На спутник действует гравитационная сила, в любой точке траектории направленная к центру Земли. Поскольку точка O всегда лежит на линии действия этой

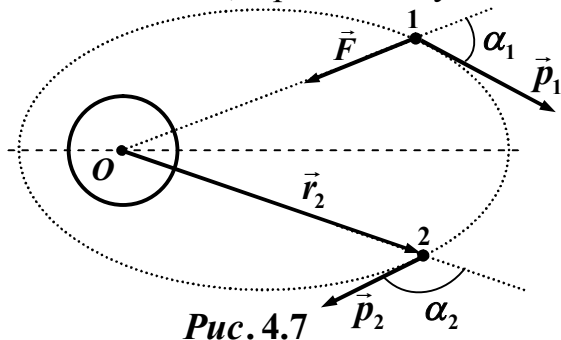


Рис. 4.7

* **Центральная сила** – сила, линия действия которой при любом положении тела проходит через одну и ту же точку, называемую центром силы.

силы, то ее момент относительно этой точки в любой момент времени равен нулю. Силами притяжения спутника к другим планетам солнечной системы, в том числе и к Солнцу, пренебрегаем. При движении спутника в любой точке его траектории вектор момента импульса будет постоянным, т.е. $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$. В скалярном виде это соотношение имеет вид

$$r_1 \cdot (m \cdot V_1) \cdot \sin \alpha_1 = r_2 \cdot (m \cdot V_2) \cdot \sin \alpha_2. \quad (4.23)$$

Закон сохранения момента импульса вместе с законом сохранения механической энергии позволяют рассчитать траектории движения спутников вокруг планет. *Важно помнить, что последнее соотношение справедливо только относительно единственной точки O , называемой силовым центром силы притяжения.*

Для вычисления изменения момента импульса материальной точки за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, проинтегрируем уравнение моментов (4.22), в результате получим следующее соотношение:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt. \quad (4.24)$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения называют *импульсом момента равнодействующей всех сил.*

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Пусть на данную систему точек действуют внешние тела. Силы, создаваемые внешними телами, назовем *внешними силами*. Кроме того, материальные точки, образующие систему, могут взаимодействовать между собой. Эти силы назовем *внутренними силами*. Рассмотрим i – материальную точку. Обозначим результирующий момент внешних сил \vec{M}_i , действующих на нее, а сумму моментов всех внутренних сил – $\sum_{j=1}^n \vec{M}_{j,i}^*$, причем $j \neq i$ (частица сама с собой не взаимодействует). Запишем уравнение моментов для i – той точки

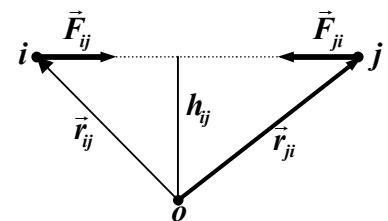
$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i + \sum_{j=1}^n \vec{M}_{j,i}^*. \quad (4.25)$$

Аналогичные уравнения можно записать и для остальных материальных точек рассматриваемой системы. Сложив записанные уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{M}_{j,i}^*. \quad (4.26)$$

Все внутренние силы являются парными, причем линии действия пары сил \vec{F}_{ij} и \vec{F}_{ji} совпадают.

Плечи этих сил относительно точки O одинаковы. Т.к. эта пара сил удовлетворяет третьему закону Ньютона ($\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$), то и моменты этой пары сил одинаковы по величине, но противоположно направлены, т.е. $\vec{M}_{ij}^* = -\vec{M}_{ji}^*$. Следовательно, сумма моментов внутренних сил равна нулю, т.е.



$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{M}_{j,i}^* = \vec{0}$. Учтем, что сумма производных равна производной от суммы,

откуда выражение $\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt}$ примет вид $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$, $\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$ – результирующий момент импульса системы материальных точек. Запишем уравнение (4.26) в виде

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{M}_i \right)_{\text{внешних}}} \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) называется уравнением моментов для системы материальных точек. Это уравнение можно применять и для системы твердых тел, т.к. тела можно разбить на бесконечно малые части, и получить систему материальных точек.

Вывод: Производная от результирующего момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил, действующих на данную систему.

Заметим, что в неинерциальной системе отсчета необходимо учитывать моменты сил инерции относительно той же точки O .

Приращение момента импульса для системы материальных точек вычисляется из следующего соотношения:

$$\boxed{\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{\text{внешних}} \cdot dt} \quad (4.28)$$

Сформулируем условия, при выполнении которых сохраняется момент импульса.

Из уравнения (4.27) следует: для того, чтобы $\vec{L} = \overline{const}$, необходимо чтобы $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$, а это значит, что сумма моментов внешних сил должна равняться

нулю, т.е. $\left(\sum_{i=1}^n \vec{M}_i \right)_{\text{внешних}} = \vec{0}$. Последнее условие выполняется в следующих случаях:

- 1) внешние силы отсутствуют в замкнутых* системах. Отсюда следует, что в замкнутых системах вектор момента импульса остается постоянным. Это утверждение называется законом сохранения момента импульса. Причем этот закон выполняется для любой точки инерциальной системы отсчета;
- 2) момент импульса будет сохраняться с течением времени и в незамкнутых системах, при условии, что сумма моментов всех внешних сил равна нулю. В неинерциальных системах отсчета к моментам внешних сил необходимо добавить момент сил инерции.

* *Замкнутая система* - это система, на которую внешние силы не действуют.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте формулировку уравнения моментов материальной точки.
2. Моменты каких сил изменяют момент импульса системы?
3. Почему внутренние силы системы материальных точек не изменяют суммарный момент импульса?
4. Дайте формулировку уравнения моментов системы материальных точек.
5. Сформулируйте условия, при которых момент импульса системы материальных точек не зависит от времени.
6. Можем ли мы использовать закон сохранения момента импульса в неинерциальных системах отсчета?

Примеры решения задач

Пример 8*. Момент импульса частицы относительно некоторой точки меняется со временем t по закону $\vec{L} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} - 3 \cdot t \cdot \vec{j}$, где \vec{i}, \vec{j} – единичные векторы (орты). Найти время, когда момент силы \vec{M} , действующий на частицу, составляет угол с векторами \vec{L} равный 60° .

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением моментов для материальной точки (4.22), получим зависимость момента силы от времени

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \cdot t \cdot \vec{i} - 3 \cdot t \cdot \vec{j}) = 2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}. \quad (1)$$

Найдем скалярное произведение векторов момента силы и момента импульса, т.е.

$$\begin{aligned} \vec{M} \cdot \vec{L} &= |\vec{M}| \cdot |\vec{L}| \cdot \cos 60^\circ = M_x \cdot L_x + M_y \cdot L_y \Rightarrow \\ \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot \cos 60^\circ &= M_x \cdot L_x + M_y \cdot L_y. \end{aligned}$$

Из равенства (1) и условия задачи находим проекции M_x, M_y, L_x, L_y и подставим в последнее соотношение, получим следующее уравнение:

$$\sqrt{2^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(2 \cdot t)^2 + (-3 \cdot t)^2} \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot (2 \cdot t) + (-6) \cdot (-3 \cdot t).$$

Упростим это уравнение

$$\begin{aligned} (4 + 36) \cdot (4 \cdot t^2 + 9 \cdot t^2) \cdot \frac{1}{4} &= (4 \cdot t + 18 \cdot t)^2 \Rightarrow \\ 10 \cdot 13 \cdot t^2 &= 484 \cdot t^4 \Rightarrow t^2 \cdot (130 - 484 \cdot t^2). \end{aligned}$$

Находим корни последнего уравнения

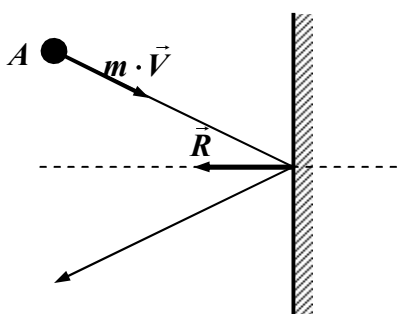
*Задача повышенной сложности

$$t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0c;$$

$$130 - 484 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{130}{484}} = \pm 0,518c \Rightarrow t_2 = 0,518c; t_3 = -0,518c.$$

Значение $t_1 = 0c$ является посторонним корнем, т.к. момент импульса является нулевым вектором, корень $t_3 = -0,518c$ отрицательный, и по этой причине является посторонним. Единственным корнем является $t_2 = 0,518c$. Он и будет являться ответом.

Пример 9. Шайба A , двигаясь по гладкой горизонтальной поверхности, упруго отскакивает от гладкой вертикальной стенки (см. рис, вид сверху). Найти точку, относительно которой момент импульса шайбы будет оставаться постоянным в процессе всего движения.



Решение. Запишем уравнение моментов для твердого тела

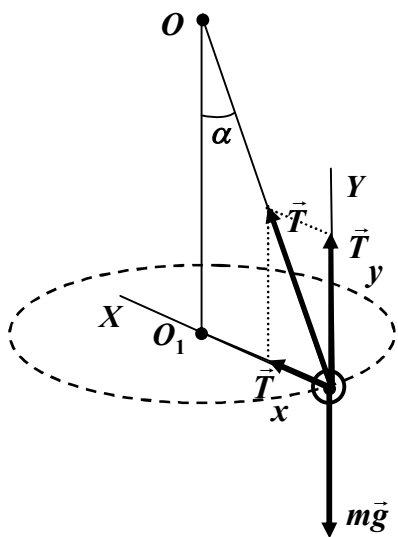
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{M}_i \right)_{\text{внешних}}.$$

Рассмотрим все внешние силы, действующие на шайбу в процессе движения.

При движении шайбы к стенке на нее действуют две силы, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции гладкой горизонтальной

поверхности \vec{N} . Векторы этих сил перпендикулярны плоскости рисунка. Сумма этих сил равна нулю, и кроме того, линии действия их совпадают, поэтому сумма моментов сил $m\vec{g}$ и \vec{N} равна нулю относительно любой точки.

В момент удара о стенку на шайбу действует вертикальная стенка с силой реакции \vec{R} . Момент этой силы относительно точки всегда будет равен нулю в том случае, если точка O лежит на линии ее действия, т.к. плечо силы \vec{R} равно нулю.



Вывод: Момент импульса шайбы сохраняется со временем относительно точек, лежащих на перпендикуляре к вертикальной стенке, проходящем через точку удара (пунктирная линия).

Пример 10*. Небольшой шарик массой m , привязанный нитью длины L к потолку в точке O , движется по горизонтальной окружности так, что нить вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Относительно каких точек момент импульса \vec{L} шарика остается постоянным? Найти модуль приращения момента импульса шарика относительно точки O за половину оборота.

Решение. На шарик, вращающийся по окружности, действуют два тела – Земля с силой тяжести $m\vec{g}$ и нить силой натяжения \vec{T} . Для упрощения решения задачи силу натяжения нити представим в виде двух составляющих, вертикальной \vec{T}_y и горизонтальной \vec{T}_x . Запишем второй закон Ньютона в векторной форме с учетом того, что $\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_y$, получим уравнение

* Задача повышенной сложности.

$$m \cdot \vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{T}_x + \vec{T}_y. \quad (1)$$

Спроектируем равенство(1) на оси координат OX и OY , получим равенства

$$\begin{aligned} OX: \quad m \cdot a_n &= T_x, \\ OY: \quad 0 &= T_y - m \cdot g. \end{aligned} \quad (2)$$

Из равенства для оси OY вытекает, что $\vec{T}_y + m\vec{g} = \vec{0}$, и кроме того линии действия $m\vec{g}$ и \vec{T}_y совпадают, следовательно сумма моментов этих сил относительно любой точки прямой OO_1 будет равна нулю. Остается некомпенсированным момент составляющей \vec{T}_x . С учетом этого запишем уравнение моментов для шарика относительно произвольной точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{T_x},$$

где \vec{M}_{T_x} – момент составляющей \vec{T}_x . В любой точке траектории движения шарика линия действия составляющей силы натяжения \vec{T}_x проходит через центр вращения (точку O_1). Отсюда следует, что момент этой силы относительно точки O_1 в любой момент времени равен нулю. Это значит, что точка O_1 является единственной точкой, относительно которой момент импульса сохраняется со временем.

Приращение момента импульса относительно точки O вычислим из соотношения (4.28). Заметим, что момент силы натяжения \vec{T} относительно точки O равен нулю, т.к. линия действия этой силы проходит через точку O . Для нахождения величины вектора изменения момента импульса имеем соотношение

$$|\Delta\vec{L}| = (mg \cdot l \cdot \sin \alpha) \cdot \Delta t, \quad (3)$$

где $mg \cdot l \cdot \sin \alpha$ – момент силы тяжести относительно точки O , Δt – время движения, равное половине периода вращения. Величину $\sin \alpha$ найдем из соотношений (2):

$$\begin{aligned} OX: \quad m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \alpha &= T \cdot \sin \alpha \\ OY: \quad 0 &= -m \cdot g + T \cdot \cos \alpha \end{aligned} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot l} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 \cdot l}\right)^2}.$$

Выразим время Δt через угловую скорость $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega \cdot 2} = \frac{\pi}{\omega}$.

Подставим в равенство (3) выражения для Δt и $\sin \alpha$, получим соотношение для величины вектора изменения момента импульса относительно точки O за время, равное половине времени оборота

$$|\Delta\vec{L}| = m \cdot g \cdot l \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 \cdot l}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{\omega}.$$

§4.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Тензор момента инерции твердого тела

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси OZ . Разобьем данное тело на n бесконечно малых частей, размер которых по сравнению с \vec{r} очень мал, поэтому их можно считать материальными точками. Для описания этого движения возьмем уравнение моментов для системы материальных точек и спроектируем это равенство на ось вращения OZ , получим следующее уравнение:

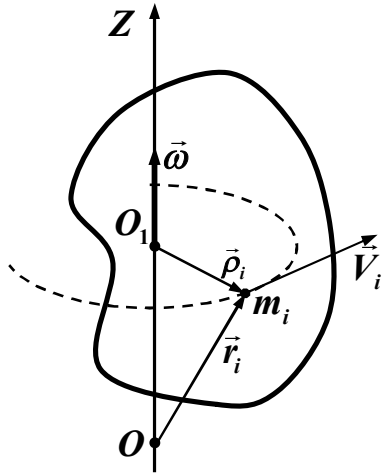


Рис. 4.10

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n M_{zi} \right). \quad (4.29)$$

Из (4.29) следует, что **производная от проекции момента импульса на ось вращения OZ равна сумме проекций моментов сил, действующих на данное тело.** Другими словами, **производная от момента импульса твердого тела относительно оси вращения равна сумме моментов сил относительно той же оси вращения.**

Выразим момент импульса тела относительно оси OZ через угловую скорость. Учтем, что угловая скорость вращения одинакова для всех бесконечно малых частей тела. Величина проекции момента импульса i – той части равна произведению величины импульса на плечо вектора импульса относительно оси вращения, т.е.

$$L_{zi} = m_i \cdot V_i \cdot \rho_i = m_i \cdot (\omega_z \cdot \rho_i) \cdot \rho_i = m_i \cdot \rho_i^2 \cdot \omega_z. \quad (4.30)$$

Записав аналогичные соотношения для всех частей, и сложив их, получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n L_{zi} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \rho_i^2 \cdot \omega_z = \omega_z \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \rho_i^2, \quad (4.31)$$

где $L_z = \sum_{i=1}^n L_{zi}$ – момент импульса тела относительно оси вращения OZ ;

$J_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \rho_i^2$ – момент инерции тела относительно оси вращения.

Окончательно имеем следующее соотношение:

$$L_z = J_z \cdot \omega_z. \quad (4.32)$$

Таким образом, **проекция момента импульса тела относительно оси вращения равна моменту инерции тела относительно той же оси, умноженному на проекцию угловой скорости.**

Заметим, что момент импульса относительно оси вращения является алгебраической величиной, знак этой величины определяется знаком проекции угловой скорости на ось вращения.

Соотношение (4.32) для вектора момента импульса \vec{L} относительно некоторой точки и вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ является более сложным, т.к. вектор угловой скорости при закреплённой оси вращения направлен по этой оси, а направление вектора момента импульса зависит от выбора точки O .

По этой причине векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ не являются параллельными векторами, а, следовательно, нельзя получить вектор \vec{L} умножением вектора $\vec{\omega}$ на число. Из курса линейной алгебры известно, любой вектор, в том числе, векторы момента импульса и угловой скорости можно представить в виде столбцов:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

В этом случае, всегда найдётся матрица размером 3×3 , такая, для которой выполняются следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{aligned} L_x &= J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz} \cdot \omega_z \\ L_y &= J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz} \cdot \omega_z \\ L_z &= J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z \end{aligned}$$

где матрица 3×3 называется тензором момента инерции.

Заметим, что эта матрица является симметричной относительно главной диагонали, т.е.

$$J_{xy} = J_{yx}, J_{xz} = J_{zx}, J_{yz} = J_{zy}.$$

Отсюда вытекает следующее векторное соотношение:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (4.32a).$$

Таким образом, момент импульса твёрдого тела относительно некоторой точки O равен тензору момента инерции этого тела умноженному на вектор угловой скорости.

Получим уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси, для чего спроектируем равенство (4.32) на ось OZ , и вместо L_z подставим в равенство (4.29), будем иметь выражение

$$\frac{d}{dt}(J_z \cdot \omega_z) = \left(\sum_{i=1}^n M_{zi} \right) \Rightarrow J_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n M_{zi} \right) \Rightarrow J_z \cdot \varepsilon_z = \left(\sum_{i=1}^n M_{zi} \right), \quad (4.33)$$

где ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения.

Окончательно имеем следующее уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\boxed{J_z \cdot \varepsilon_z = \sum_{i=1}^n M_{zi}} \quad (4.34)$$

Из уравнения (4.34) следует, что **произведение момента инерции тела относительно оси вращения на проекцию его углового ускорения равно сумме моментов всех сил, действующих на тело, относительно оси вращения.**

Правило знаков. Если вектор угла поворота, направление которого определяется по правилу «буравчика», направлен по оси вращения OZ , туда же направлен и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. При этом проекция угловой скорости положительная величина.

Для ускоренного характера движения вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором угловой скорости, и его проекция положительная величина; для замедленного характера движения проекция углового ускорения является отрицательной величиной.

Для определения знака проекции момента силы, вначале нужно с помощью правила «буравчика» определить направление вектора момента силы относительно оси OZ , а уже затем определить знак его проекции.

Получим выражение для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Учтем при этом, что кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий бесконечно малых его частей, т.е.

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot (\omega \cdot \rho_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \rho_i^2 = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}.$$

Таким образом, выражение для кинетической энергии вращающегося тела имеет вид

$$\boxed{W_k = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}} \quad (4.35)$$

Работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси на бесконечно малом участке траектории вычисляется по формуле

$$\boxed{\delta A = M_z \cdot d\varphi}, \quad (4.36)$$

Работа внешних сил при повороте тела на угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ вычисляется с помощью следующего интеграла:

$$\boxed{A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi}. \quad (4.37)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое соотношение выражает взаимосвязь проекции момента импульса твердого тела на ось вращения с проекцией угловой скорости? Какие величины в него входят?
2. Дайте определение момента импульса, момента инерции твердого тела относительно оси вращения.
3. Сформулируйте основное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси в инерциальной системе отсчета.
4. Сформулируйте основное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси в неинерциальной системе отсчета.
5. Приведите примеры сил инерции.
6. Объясните правила, используемые для определения знаков проекции угловой скорости и момента силы относительно оси вращения.
7. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Какие величины в нее входят?
8. По какой формуле определяется механическая работа силы, действующей на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси? Какие величины в нее входят?

Примеры решения задач

Пример 11. Две гири массами $m_1 = 2 \text{ кг}$ и $m_2 = 1 \text{ кг}$ соединены нитью и перекинута через блок массой $M = 2 \text{ кг}$ и радиусом $R = 0,1 \text{ м}$. Найти: 1) угловое ускорение блока ε ; 2) ускорение a , с которым движутся гири; 3) силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири; 4) силу реакции оси вращения N . Блок считать однородным диском. Массой, деформацией нитей и трением в блоке пренебречь.

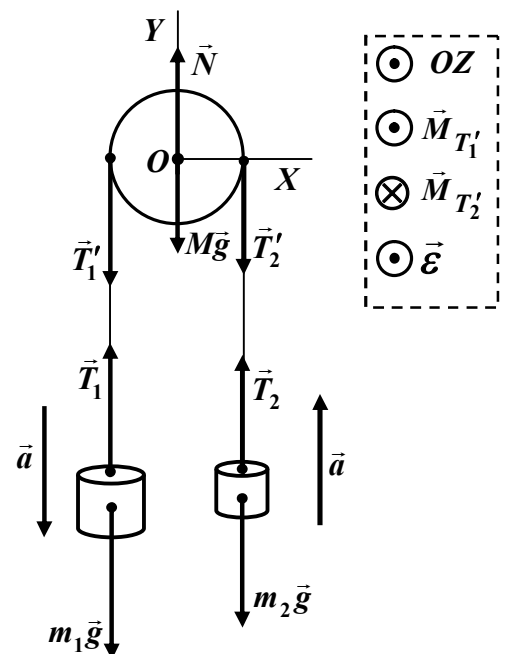
Решение. Изобразим силы, с которыми внешние тела действуют на блок. На блок действуют: Земля с силой тяжести $M\vec{g}$, ось вращения с силой реакции \vec{N} , нити с силами натяжения \vec{T}'_1 и \vec{T}'_2 (см. рис.).

На гири действуют: Земля с силой тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$; нити – с силами натяжения \vec{T}_1 и \vec{T}_2 .

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке. Используя правило «буравчика», определим и укажем направление векторов моментов сил натяжения нитей, действующих на блок; направление вектора его углового ускорения (см. вставку.– прямоугольник к рис). Моменты сил \vec{N} и $M\vec{g}$ относительно оси вращения OZ равны нулю, т.к. линии действия этих сил пересекают ось OZ .

Запишем уравнения вращения тела вокруг закрепленной оси (4.34)

$$J_z \cdot \varepsilon_z = (M_{T_1})_z + (M_{T_2})_z, \quad (1)$$



где $(M_{T_1})_z, (M_{T_2})_z$ – моменты сил натяжения нити относительно оси вращения; J_z – момент инерции блока относительно оси вращения, ε_z – проекция углового ускорения на ось OZ .

Учитывая, что момент инерции диска равен $J_z = \frac{M \cdot R^2}{2}$, и, кроме того, $(M_{T_1})_z = |\vec{T}'_1| \cdot R$, $(M_{T_2})_z = -|\vec{T}'_2| \cdot R$, $\varepsilon_z = \varepsilon$ (см. вставку к рис.), получим следующее уравнение вращения блока вокруг оси OZ :

$$\frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \varepsilon = (|\vec{T}'_1| - |\vec{T}'_2|) \cdot R \Rightarrow \frac{M \cdot R}{2} \cdot \varepsilon = (|\vec{T}'_1| - |\vec{T}'_2|). \quad (2)$$

В данной задаче предполагается, что нить не скользит по блоку. Т.к нить не деформируется, то скорость и ускорение любой точки нити совпадают со скоростью и ускорением поступательного движения гирь, а также с тангенциальным ускорением блока, т.е.

$$a = a_\tau = \varepsilon_z \cdot R. \quad (3)$$

Из равенства (3) находим величину углового ускорения, и, подставим в равенство (2), получим следующее соотношение:

$$\frac{M \cdot R}{2} \cdot \frac{a}{R} = (|\vec{T}'_1| - |\vec{T}'_2|) \Rightarrow \frac{M \cdot a}{2} = (|\vec{T}'_1| - |\vec{T}'_2|). \quad (4)$$

Запишем второй закон Ньютона для поступательного движения гирь с ускорением \vec{a} в проекции на ось OY

$$OY: -m_1 \cdot a = -m_1 \cdot g + T_1, \quad m_2 \cdot a = T_2 - m_2 \cdot g. \quad (5)$$

Для невесомых нитей векторы сил натяжения \vec{T}'_1, \vec{T}_1 и \vec{T}'_2, \vec{T}_2 равны по величине, т.е.

$$|\vec{T}'_1| = |\vec{T}_1|, \quad |\vec{T}'_2| = |\vec{T}_2|. \quad (6)$$

Выразим величины векторов сил T_1 и T_2 из уравнений (5), и подставим в равенство (4), получим соотношение, позволяющее найти ускорение движения гирь

$$\begin{aligned} \frac{M \cdot a}{2} &= [(m_1 \cdot g - m_1 \cdot a) - (m_2 \cdot g + m_2 \cdot a)] \Rightarrow \\ \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right) \cdot a &= (m_1 - m_2) \cdot g \Rightarrow \\ a &= \frac{m_1 - m_2}{\frac{M}{2} + m_1 + m_2} \cdot g = \frac{2 - 1}{\frac{2}{2} + 2 + 1} \cdot g = 0,25g = 2,5 \frac{M}{c^2}. \end{aligned}$$

Величину углового ускорения найдем из формулы(3)

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{0,25 \cdot 10}{0,1} = 25 \text{ рад} / c^2.$$

Силы натяжения нити определим из уравнений (5)

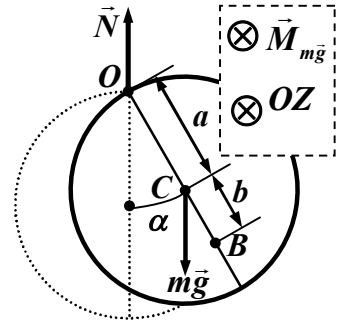
$$T_1 = m_1 \cdot (g - a) = 2 \cdot (g - 0,25 \cdot g) = 1,5 \cdot g = 15H,$$

$$T_2 = m_2 \cdot (g + a) = 1 \cdot (g + 0,25 \cdot g) = 1,25 \cdot g = 12,5H.$$

Силу реакции N находим из условия равновесия оси вращения OZ

$$OX: N - M \cdot g - T'_1 - T'_2 = 0 \Rightarrow N = M \cdot g + T'_1 + T'_2 = 47,5H.$$

Пример 12. Однородный диск радиусом $R = 10$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O на нём. Диск отклонили на угол альфа и отпустили. Определить для начального момента времени величину вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ и тангенциального \boldsymbol{a}_τ ускорения точки B , находящейся на диске. Вычисления выполнить для следующего случая: 1) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/6$.



Решение. Изобразим все силы, с которыми внешние тела действуют на диск, закрепленный в точке O . На диск действует Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, точка приложения которой находится в центре масс, и, кроме того, на него действует ось с силой реакции, приложенной в точке O .

Для решения данной задачи используем уравнение вращения вокруг оси OZ (4.34).

$$J_z \cdot \varepsilon_z = \left(\sum_{i=1}^n M_{zi} \right)_{\text{внешних}}, \quad (1)$$

где J_z – момент инерции диска относительно закрепленной оси, проходящей через точку

O ; ε_z – проекция углового ускорения диска на ось OZ ; $\left(\sum_{i=1}^n M_{zi} \right)_{\text{внешних}}$ – сумма моментов внешних сил, действующих на диск.

Момент инерции диска относительно оси OZ найдем по теореме Штейнера–Гюйгенса

$$J_z = J_c + m \cdot d^2, \quad (2)$$

где J_c – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс (точка C), d – расстояние между осями. В данной задаче $d = R$. С учетом этого находим момент инерции диска относительно оси OZ

$$J_z = \frac{m \cdot R^2}{2} + m \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2. \quad (3)$$

Момент силы реакции \vec{N} относительно оси OZ равен нулю, т.к. точка приложения этой силы лежит на оси вращения. Величина момента силы тяжести относительно оси вращения вычисляется по формуле

$$M_{mg} = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha, \quad (4)$$

где $l \cdot \sin \alpha$ – плечо силы тяжести относительно оси вращения OZ .

С учетом равенств (3) и (4) уравнение движения тела примет вид

$$\frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \varepsilon = m \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot R \cdot \varepsilon = g \cdot \sin \alpha.$$

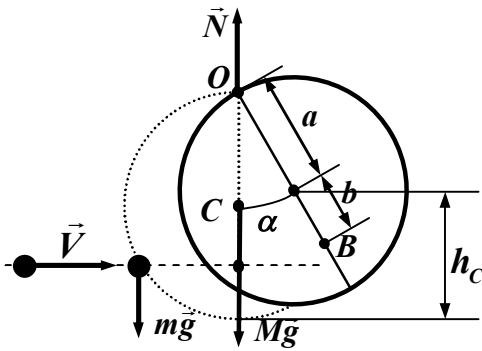
Из последнего соотношения находим величину вектора углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{R} \cdot \sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{0,1} \cdot \sin 30^\circ = 33,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Величину тангенциального ускорения точки B находим из следующего кинематического соотношения:

$$\boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 33,3 \cdot (0,1 + 0,05) \approx 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Пример 13. Однородный диск радиусом $R = 10 \text{ см}$ и массой $M = 2 \text{ кг}$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O на нём. В диск попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 10 \text{ г}$, вектор скорости которой направлен в точку B . Диск вместе с пулей отклоняются на угол α . Определить величину начальной скорости пули. Пулю считать материальной точкой. Вычисления выполнить для следующего случая:



1) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/6$.

Решение. Изобразим все силы, с которыми внешние тела действуют на диск, закрепленный в точке O . На диск действует Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, точка приложения которой находится в центре масс, и, кроме того, на него действует ось с силой реакции, приложенной в точке O .

Для решения данной задачи используем уравнение моментов для системы «пуля–диск» в проекции на ось OZ . Учтем, что ось OZ проходит через точку O , и направлена перпендикулярно плоскости рисунка к нам. Запишем уравнение моментов для системы «пуля–диск» в проекции на ось OZ

$$d(L_z)_{\text{системы}} = [(M_N)_z + (M_{Mg})_z + (M_{mg})_z] \cdot dt, \quad (1)$$

где $(M_N)_z$, $(M_{Mg})_z$ – моменты силы реакции и силы тяжести диска относительно оси OZ ; $(M_{mg})_z$ – момент силы тяжести пули относительно той же оси. Линии действия сил реакции \vec{N} и силы тяжести диска $M\vec{g}$ пересекают ось OZ , поэтому моменты этих сил относительно этой оси равны нулю. С учетом этого равенство (1) упростится и примет вид

$$d(L_z)_{\text{системы}} = (M_{mg})_z \cdot dt. \quad (2)$$

В данной задаче время взаимодействия пули с диском является бесконечно малой величиной, т.е. $dt \rightarrow 0$, отсюда вытекает, что произведение момента силы тяжести пули относительно оси вращения на время взаимодействия также является бесконечно малой величиной $(M_{mg})_z \cdot dt \rightarrow 0$. Следовательно, бесконечно малое изменение момента системы «пуля–диск» относительно оси вращения равно нулю, т.е. $d(L_z)_{\text{системы}} \approx 0$. С учетом этого запишем закон сохранения проекции момента импульса системы в проекции на ось вращения

$$m \cdot V \cdot (a + b) = J_z \cdot \omega, \quad (3)$$

где $m \cdot V \cdot (a + b)$ – момент импульса пули относительно оси OZ до взаимодействия с диском; $J_z \cdot \omega$ – момент импульса системы «пуля–диск» после взаимодействия; J_z – момент инерции системы «пуля–диск» относительно оси вращения. При вычислении момента инерции системы «пуля–диск» для диска применим теорему Штейнера–Гюйгенса, а момент инерции пули рассчитаем по формуле момента инерции для материальной точки, т.е.

$$J_z = \left(\frac{M \cdot R^2}{2} + M \cdot R^2 \right) + m \cdot R^2 = \frac{3}{2} M \cdot R^2 + m \cdot R^2. \quad (4)$$

С учетом равенства (4) соотношение (3) примет вид

$$m \cdot V \cdot (a + b) = (1,5 \cdot M \cdot R^2 + m \cdot R^2) \cdot \omega \quad (5)$$

На систему «пуля–диск» действуют внешние сил: $M\vec{g}$ – сила тяжести диска; $m\vec{g}$ – сила тяжести пули. Эти силы являются консервативными. И, кроме того, действует сила реакции \vec{N} , точка приложения которой неподвижна, и, следовательно, работа этой силы равна нулю. Отсюда вытекает то, что механическая энергия системы «пуля–диск» после взаимодействия не зависит от времени. Запишем закон сохранения механической энергии системы после попадания пули в диск

$$\frac{J_z \cdot \omega^2}{2} = M \cdot g \cdot h_C, \quad (6)$$

где $\frac{J_z \cdot \omega^2}{2}$ – начальная кинетическая энергия системы; $M \cdot g \cdot h_C$ – потенциальная энергия системы «пуля–диск» в момент максимального отклонения от положения равновесия; h_C – высота центра масс диска в этот момент. Т.к. масса пули является бесконечно малой величиной по сравнению с массой диска, то ее потенциальной энергией мы пренебрегаем.

Высота центра масс диска связана с его радиусом соотношением

$$h_C = (1 - \cos \alpha) \cdot R. \quad (7)$$

Из соотношений (4) и (7) вместо J_z и h_C подставим в равенство (6), получим следующее уравнение:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}M \cdot R^2 + m \cdot R^2\right) \cdot \omega^2}{2} = M \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot R. \quad (8)$$

Уравнение (8) позволяет найти величину угловой скорости системы «пуля–диск»

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot R}{\left(\frac{3}{2}M \cdot R^2 + m \cdot R^2\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{3}{2}M + m\right) \cdot R}}. \quad (9)$$

Подставим в уравнение (5) выражение для угловой скорости, получим следующее выражение:

$$m \cdot V \cdot (a + b) = (1,5 \cdot M \cdot R^2 + m \cdot R^2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{3}{2}M + m\right) \cdot R}}. \quad (10)$$

Полученное равенство позволяет нам определить искомую величину, а именно, скорость пули до столкновения с диском

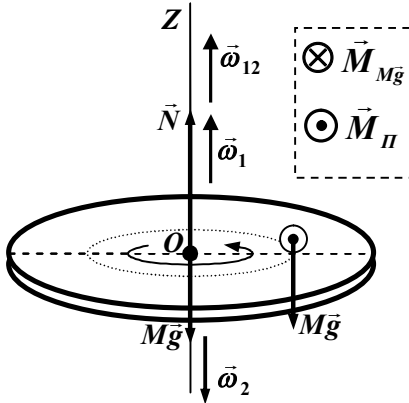
$$V = \frac{(1,5 \cdot M \cdot R^2 + m \cdot R^2)}{m \cdot (a + b)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{3}{2}M + m\right) \cdot R}}.$$

Вычислим величину вектора скорости, для чего подставим в последнее равенство численные значения входящих в него величин

$$V = \frac{(1,5 \cdot 2 \cdot 0,1^2 + 0,01 \cdot 0,1^2)}{0,01 \cdot (0,1 + 0,05)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot (1 - \cos 30^\circ)}{\left(\frac{3}{2} \cdot 2 + 0,01\right) \cdot 0,1}} = 84,4 \text{ м/с}.$$

Пример 14. Человек массой M стоит на расстоянии r от оси горизонтального однородного диска массой M и радиусом R , который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент времени человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол $\Delta\varphi_{12} = \pi/2$ относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека.

Решение. Для решения данной задачи выберем ось OZ и совместим ее с осью вращения системы «человек–диск» (см. рис.). Изобразим силы, с которыми внешние тела действуют на данную систему. На человека действует сила тяжести $M\vec{g}$ со стороны Земли. На диск действует сила тяжести $M\vec{g}$ со стороны Земли, сила реакции \vec{N} со стороны подставки, и, кроме того, в подшипниках данной системы возникает пара сил, создающая момент сил \vec{M}_Π , противодействующий моменту силы тяжести человека (как в балке с жесткой заделкой в стенку) (см. вставку к рисунку). Относительно оси OZ моменты силы тяжести платформы и силы реакции равны нулю, т.к. их линии действия лежат на оси вращения. Момент силы тяжести человека



относительно оси OZ и момент пары сил в подшипниках перпендикулярны этой оси (см. вставку), следовательно, проекции векторов $\vec{M}_{M\vec{g}}$ и \vec{M}_Π на эту ось будут равны нулю. Отсюда вытекает то, что проекция момента импульса системы «человек–диск» на ось OZ будет оставаться постоянной. Учтем, что начальный момент импульса рассматриваемой системы равен нулю, запишем закон сохранения момента импульса на ось OZ

относительно оси OZ и момент пары сил в подшипниках перпендикулярны этой оси (см. вставку), следовательно, проекции векторов $\vec{M}_{M\vec{g}}$ и \vec{M}_Π на эту ось будут равны нулю.

Отсюда вытекает то, что проекция момента импульса системы «человек–диск» на ось OZ будет оставаться постоянной. Учтем, что начальный момент импульса рассматриваемой системы равен нулю, запишем закон сохранения момента импульса на ось OZ

$$0 = J_{1z} \cdot \omega_{1z} + J_{2z} \cdot \omega_{2z}, \quad (1)$$

где $J_{1z} \cdot \omega_{1z}$ – проекция момента импульса человека на ось; $J_{2z} \cdot \omega_{2z}$ – проекция момента импульса диска на ось OZ ; ω_{1z}, ω_{2z} – проекции угловой скорости вращения человека и диска соответственно относительно Земли.

С учетом выбранного направления оси OZ получим следующее выражения:

$$0 = J_{1z} \cdot \omega_1 - J_{2z} \cdot \omega_2. \quad (2)$$

Угловые скорости человека и диска относительно Земли связаны соотношением

$$\omega_{1z} = \omega_{12z} + \omega_{2z} \Rightarrow \omega_1 = \omega_{12} - \omega_2, \quad (3)$$

где ω_{12} – величина вектора угловой скорости человека относительно диска.

Из равенства (3) вместо величины вектора угловой скорости человека относительно Земли ω_1 подставим в равенство (2) его выражение, получим следующее уравнение:

$$0 = J_{1z} \cdot (\omega_{12} - \omega_2) - J_{2z} \cdot \omega_2. \quad (4)$$

Учитывая, что $\omega_{12} = \frac{\Delta\varphi_{12}}{\Delta t}$, $\omega_2 = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t}$, и $J_{1z} = M \cdot r^2$, $J_{2z} = M \cdot R^2/2$, перепишем равенство (4) в следующем виде:

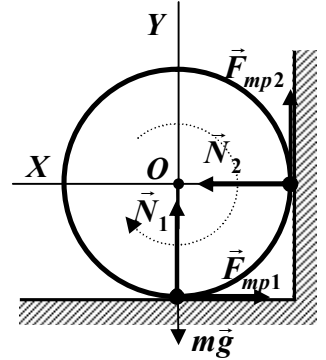
$$0 = J_{1z} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi_{12}}{\Delta t} - \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} \right) - J_{2z} \cdot \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} \Rightarrow 0 = M \cdot r^2 \cdot (\Delta\varphi_{12} - \Delta\varphi_2) - \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \Delta\varphi_2.$$

Из последнего уравнения находим угол поворота диска относительно Земли

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2 \cdot M \cdot r^2}{2 \cdot M \cdot r^2 + M \cdot R^2} \cdot \Delta\varphi_{12} = \frac{r^2}{2 \cdot r^2 + R^2} \cdot \pi.$$

Пример 15*. Однородный цилиндр радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили в угол (см. рис.) Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ . Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

Решение. Изобразим все силы, с которыми внешние тела действуют на цилиндр. На цилиндр действуют Земля с силой тяжести $m\vec{g}$; горизонтальная поверхность угла – с силами трения \vec{F}_{mp1} и реакции \vec{N}_1 ; вертикальная поверхность угла – с силами трения \vec{F}_{mp2} и реакции \vec{N}_2 (см. рис.). Выберем прямоугольную декартову систему координат XYZ так, как показано на рисунке. Цилиндр совершает только вращательное движение вокруг оси OZ , поступательное движение центра его масс отсутствует, следовательно, сумма сил действующих на данное тело, равна нулю



$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp1} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{mp2} = \vec{0}.$$

Спроектируем данное векторное равенство на оси OX и OY , учтем при этом то, что силы трения связаны с силами реакций соотношениями $|\vec{F}_{mp1}| = \mu \cdot |\vec{N}_1|$ и $|\vec{F}_{mp2}| = \mu \cdot |\vec{N}_2|$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} OX: N_2 - F_{mp1} = 0 \\ OY: N_1 + F_{mp2} - m \cdot g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OX: \frac{F_{mp2}}{\mu} - F_{mp1} = 0 \\ OY: \frac{F_{mp1}}{\mu} + F_{mp2} - m \cdot g = 0 \end{cases}.$$

Решая данную систему уравнений, находим силы трения

$$F_{mp1} = \frac{\mu}{1 + \mu^2} \cdot mg, \quad F_{mp2} = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \cdot mg. \quad (1)$$

Моменты сил $m\vec{g}$, \vec{N}_1 и \vec{N}_2 относительно оси вращения равны нулю, т.к. линии действия этих сил проходят через точку O . С учетом этого, запишем уравнение вращения цилиндра вокруг закрепленной оси OZ

$$J_z \cdot \varepsilon_z = (M_{mp1})_z + (M_{mp2})_z \Rightarrow \frac{m \cdot R^2}{2} \varepsilon_z = F_{mp1} \cdot R + F_{mp2} \cdot R. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдем величину вектора углового ускорения, учитывая при этом выражения (1) для сил трения, получим следующее выражение:

$$\varepsilon = \frac{\mu \cdot (1 + \mu)}{1 + \mu^2} \cdot \frac{g}{R}. \quad (3)$$

Угол поворота цилиндра $\Delta\varphi_z$ связан с проекцией углового ускорения на ось OZ следующим соотношением:

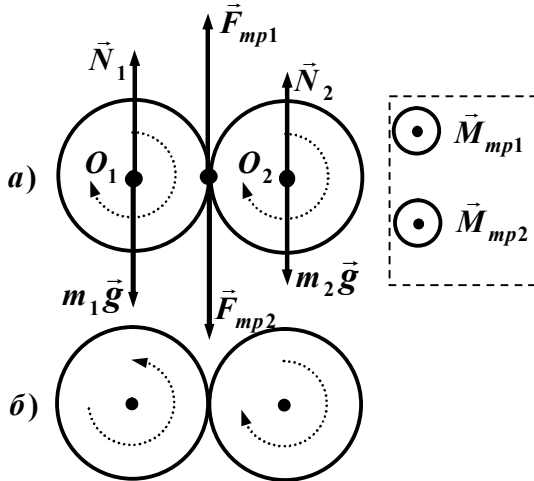
$$\Delta\varphi_z = \frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2 \cdot \varepsilon_z}. \quad (4)$$

Учитывая, что $\varepsilon_z = -\varepsilon$, $\omega_z = 0$ и $\Delta\varphi_z = 2 \cdot \pi \cdot N$, где N - число оборотов цилиндра, из выражения (4) находим N :
$$N = \frac{(1 + \mu^2) \cdot \omega_0^2 \cdot R}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 + \mu) \cdot g}.$$

*Задача повышенной сложности

Пример 16*. Двум одинакового радиуса дискам сообщили одну и ту же угловую скорость ω_0 (см. рис.), а затем их привели в соприкосновение, и система через некоторое время пришла в новое установившееся состояние движения. Оси дисков неподвижны, трения в осях нет. Моменты инерции дисков относительно их осей вращения равны J_1 и J_2 . Найти: а) приращение момента импульса системы; б) убыль ее механической энергии.

Решение. На рассматриваемую систему, состоящую из двух дисков до соприкосновения, действуют внешние тела: Земля с силой тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$; оси вращения – с силами \vec{N}_1 и \vec{N}_2 .



силами \vec{N}_1 и \vec{N}_2 .

В момент соприкосновения поверхность второго диска действует на первый с силой трения \vec{F}_{mp1} , соответственно поверхность первого диска действует на второй с силой трения \vec{F}_{mp2} . Заметим, что последние две силы удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Для решения данной задачи выберем две оси O_1Z_1 и O_2Z_2 , и направим их вдоль осей вращения дисков перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Проекция на ось O_1Z_1 изменения вектора момента импульса первого диска связана с

проекцией моментов сил, действующих на первый диск соотношением

$$\Delta L_{1z} = [(\vec{M}_{mp1})_z + (\vec{M}_{m_1g})_z + (\vec{M}_{N_1})_z] \cdot \Delta t, \quad (1)$$

где $(\vec{M}_{mp1})_z$ – проекция момента силы трения, действующей на первый диск, на ось O_1Z_1 ; $(\vec{M}_{m_1g})_z$ – проекция момента силы тяжести диска на ту же ось; $(\vec{M}_{N_1})_z$ – проекция момента силы реакции на ось O_1Z_1 ; Δt – промежуток времени, в течении которого система переходит в новое установившееся состояние движения (см. рис. б). Моменты сил тяжести и реакции относительно точки O_1 равны нулю, т.к. точка O_1 лежит на линиях действия этих сил. С учетом этого, выражение (1) упростится и примет вид

$$\Delta L_{1z} = (\vec{M}_{mp1})_z \cdot \Delta t. \quad (2)$$

Вместо проекции вектора изменения момента импульса на ось O_1Z_1 в равенство (2) подставим соотношение $\Delta L_{1z} = J_{1z} \cdot \omega_{1z} - J_{1z} \cdot \omega_{0z}$, получим следующее выражение:

$$J_{1z} \cdot \omega_{1z} - J_{1z} \cdot \omega_{0z} = (\vec{M}_{mp1})_z \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Проведем аналогичные рассуждения для второго диска, будем иметь следующее соотношение для проекции вектора момента импульса на ось вращения O_2Z_2 .

$$J_{2z} \cdot \omega_{2z} - J_{2z} \cdot \omega_{0z} = (\vec{M}_{mp2})_z \cdot \Delta t. \quad (4)$$

Заметим, что в данной задаче векторы моментов сил трения \vec{M}_{mp1} и \vec{M}_{mp2} , действующих на диски, направлены в одну и ту же сторону (см. вставку к рисунку). Этот факт позволяет записать следующее соотношение для проекций векторов момен-

*Задача повышенной сложности

тов сил трения $(\vec{M}_{mp1})_z = (\vec{M}_{mp2})_z$, что позволяет приравнять левые части равенств (3) и (4)

$$J_{1z} \cdot \omega_{1z} - J_{1z} \cdot \omega_{0z} = J_{2z} \cdot \omega_{2z} - J_{2z} \cdot \omega_{0z}. \quad (5)$$

Когда прекратится проскальзывание поверхностей дисков, то один из них изменит направление вращения. Если $J_1 < J_2$, то изменится направление вращения первого диска. Линейные скорости дисков в точке A одинаковы (см. рис.), следовательно, векторы угловых скоростей дисков в конечном состоянии и их проекции связаны соотношением $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$ и $\omega_{1z} = -\omega_{2z}$. С учетом последнего равенства выражение (5) примет вид

$$\begin{aligned} J_{1z} \cdot (-\omega_{2z}) - J_{1z} \cdot \omega_{0z} &= J_{2z} \cdot \omega_{2z} - J_{2z} \cdot \omega_{0z} \Rightarrow \\ J_{2z} \cdot \omega_{2z} + J_{1z} \cdot \omega_{2z} &= J_{1z} \cdot \omega_{0z} - J_{2z} \cdot \omega_{0z} \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим проекцию угловой скорости второго диска

$$\omega_{2z} = \frac{J_{2z} - J_{1z}}{J_{2z} + J_{1z}} \cdot \omega_{0z}. \quad (6)$$

Запишем выражение для проекции вектора момента импульса системы, состоящей из двух дисков, на ось O_1Z_1

$$\Delta L_z = (J_{1z} \cdot \omega_{1z} + J_{2z} \cdot \omega_{2z}) - (J_{1z} \cdot \omega_{0z} + J_{2z} \cdot \omega_{0z}), \quad (7)$$

где $(J_{1z}\omega_{1z} + J_{2z}\omega_{2z})$, $(J_{1z}\omega_{0z} + J_{2z}\omega_{0z})$ – соответственно конечная и начальная величина проекции вектора момента импульса системы.

Из равенства (6) вместо проекции угловой скорости второго диска ω_{2z} подставим в равенство (7), учтем при этом то, что $\omega_{1z} = -\omega_{2z}$, получим соотношение

$$\begin{aligned} \Delta L_z &= \left[J_{1z} \cdot \left(-\frac{J_{2z} - J_{1z}}{J_{2z} + J_{1z}} \cdot \omega_{0z} \right) + J_{2z} \cdot \frac{J_{2z} - J_{1z}}{J_{2z} + J_{1z}} \cdot \omega_{0z} \right] - (J_{2z} + J_{1z}) \cdot \omega_{0z} = \\ &= \frac{-J_{1z} \cdot J_{2z} + J_{1z}^2 + J_{2z}^2 - J_{1z} \cdot J_{2z} - (J_{1z} + J_{2z})^2}{J_{2z} + J_{1z}} \cdot \omega_{0z} = \frac{-4 \cdot J_{1z} \cdot J_{2z}}{J_{2z} + J_{1z}} \cdot \omega_{0z}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили искомое соотношение. Заметим, что для изменения вектора момента импульса $\Delta \vec{L}$ и вектора угловой скорости $\vec{\omega}_0$ справедливо соотношение

$$\Delta \vec{L} = \frac{-4 \cdot J_{1z} \cdot J_{2z}}{J_{2z} + J_{1z}} \cdot \vec{\omega}_0.$$

Из последнего равенства видно, вектор изменения момента импульса рассматриваемой системы $\Delta \vec{L}$ направлен против вектора угловой скорости системы в начальный момент времени $\vec{\omega}_0$, т.е. перпендикулярно плоскости рисунка к нам.

Изменение механической энергии рассматриваемой системы равно изменению ее кинетической энергии, т.е.

$$\Delta W = W_{k2} - W_{k1} = \left(\frac{J_{1z} \cdot \omega_{1z}^2}{2} + \frac{J_{2z} \cdot \omega_{2z}^2}{2} \right) - \left(\frac{J_{1z} \cdot \omega_{0z}^2}{2} + \frac{J_{2z} \cdot \omega_{0z}^2}{2} \right).$$

С учетом равенства (6) и $\omega_{1z} = -\omega_{2z}$ последнее выражение упростится и примет окончательный вид

$$\Delta W = \frac{-2 \cdot J_{1z} \cdot J_{2z} \cdot \omega_{0z}^2}{J_{1z} + J_{2z}}.$$

§4.5. Плоское движение. Уравнения плоского движения. Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

Плоское движение * совершает цилиндр, движущийся по горизонтальной поверхности. Для описания такого типа движения выберем две системы отсчета K и K' . Пусть система отсчета K является инерциальной. Систему K' поместим в центр масс тела. В системе K' твердое тело совершает только вращательное движение, описываемое уравнением (4.34). В системе K центр масс тела (точка C) движется прямолинейно. Движение центра масс тела в этой системе описывается вторым законом Ньютона. Таким образом, плоское движение описывается уравнениями

$$m \cdot \vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i, \quad (4.38)$$

$$J_z \cdot \varepsilon_z = \sum_{i=1}^n M_{zi}. \quad (4.39)$$

Первое уравнение это второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчета K . В это соотношение входят силы, являющиеся мерами взаимодействий тела с внешними телами. Система K' в общем случае движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета K , поэтому является неинерциальной, в ней, кроме внешних сил, действует поступательная сила инерции ($-m \cdot a_C$). Точка приложения этой силы находится в центре масс тела, поэтому ее момент относительно оси вращения равен нулю. По этой причине, в рисунках к задачам изображают только внешние силы, а поступательную силу инерции вообще не рассматривают.

В инерциальной системе отсчета K кинетическую энергию твердого тела, совершающего плоское движение, вычисляют по формуле

$$W_k = \frac{m \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}, \quad (4.40)$$

где V_C – скорость центра масс в инерциальной системе отсчета K ; J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс; ω – угловая скорость вращения тела в системе отсчета K' .

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение плоского движения. Какой характер движения центра масс тела в инерциальной системе отсчета?
2. Какое движение совершает твердое тело в системе отсчета, связанной с центром масс тела? Сформулируйте уравнения, описывающие плоское движение твердого тела?
3. Почему в уравнении вращательного движения не учитывают момент поступательной силы инерции?
4. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение? Какие величины в нее входят?

* **Плоское движение** - это такое движение твердого тела, при котором траектории движения всех его точек лежат в параллельных плоскостях.

Примеры решения задач

Пример 17. Однородный цилиндр массой m и радиусом R скатывается без скольжения по наклонной плоскости длиной S , составляющей угол α с горизонтом (см. рис.). Найти: 1) ускорение поступательного движения центра масс a_C ; 2) величину углового ускорения ε ; 3) силу трения $F_{тр}$; 4) время движения цилиндра по наклонной плоскости; 5) кинетическую энергию цилиндра в конце спуска.

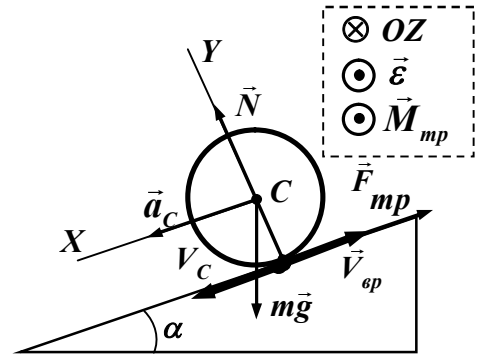
Решение. На цилиндр, совершающий плоское движение, действуют внешние тела: Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, наклонная плоскость с силой реакции \vec{N} и силой трения $\vec{F}_{тр}$. Заметим, что поскольку в данной задаче цилиндр не проскальзывает, то на него действует сила трения качения.

Выберем систему координат XYZ так, как показано на рисунке. Запишем уравнение движения центра масс (4.38) в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью наклонной плоскости

$$m \cdot \vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}. \quad (1)$$

Спроектируем векторное равенство (1) на ось OX , будем иметь следующее выражение:

$$m \cdot a_C = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_{тр} \quad (2)$$



Переходим в неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс цилиндра (точка C); записываем уравнения вращения цилиндра вокруг оси, проходящей через центр масс

$$J_z \cdot \varepsilon_z = (\vec{M}_N)_z + (\vec{M}_{mg})_z + (\vec{M}_{тр})_z,$$

где $(\vec{M}_N)_z, (\vec{M}_{mg})_z, (\vec{M}_{тр})_z$ – проекции на ось OZ , моментов силы реакции \vec{N} , силы тяжести $m\vec{g}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$ соответственно.

Проекция момента силы реакции и силы тяжести равны нулю, т.к. линии действия этих сил пересекают ось вращения. Проекция момента силы трения равна $(\vec{M}_{тр})_z = -|\vec{F}_{тр}| \cdot R$ (см. вставку к рисунку).

Учитывая, что момент инерции относительно оси вращения цилиндра равен $J_z = m \cdot R^2 / 2$ и $\varepsilon_z = -\varepsilon$ (см. рис.), перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$\frac{m \cdot R^2}{2} \cdot (-\varepsilon) = -|\vec{F}_{тр}| \cdot R \Rightarrow \frac{m \cdot R}{2} \cdot \varepsilon = |\vec{F}_{тр}|. \quad (3)$$

В данной задаче проскальзывание цилиндра отсутствует, следовательно, точки поверхности цилиндра, соприкасающиеся с поверхностью наклонной плоскости, имеют равную нулю линейную скорость. Это значит, что величина скорости поступательного

движения центра масс $|\vec{V}_C|$ равна величине скорости вращательного движения $|\vec{V}_{\text{вр}}|$ этих точек. Следовательно, величина ускорения центра масс равна величине тангенциального ускорения, т.е. $|\vec{a}_C| = |\vec{a}_\tau|$. С учетом этого равенства запишем для ускорения центра масс и углового ускорения цилиндра следующее соотношение:

$$|\vec{a}_C| = \varepsilon \cdot R. \quad (4)$$

Решив систему уравнений (2), (3) и (4), найдем величину ускорения центра масс

$$|\vec{a}_C| = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

Величину углового ускорения находим из равенства (4)

$$\varepsilon = \frac{|\vec{a}_C|}{R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{R} \cdot \sin \alpha.$$

Из уравнения (3) находим величину вектора силы трения

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = \frac{1}{3} \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Для определения времени движения цилиндра по наклонной плоскости воспользуемся соотношением $S_x = V_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$. С учетом того, что начальная скорость цилиндра равна нулю, получим выражение для времени движения

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{a_C}} = \sqrt{\frac{3 \cdot S}{g \cdot \sin \alpha}}.$$

Кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение, определим из соотношения (4.40). Учтем при этом, что $V_C = V_{\text{вр}} = \omega \cdot R$ и $J_z = \frac{m \cdot R^2}{2}$.

$$W_k = \frac{m \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2} = \frac{m \cdot V_C^2}{2} + \frac{\left(\frac{m \cdot R^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{V_C}{R}\right)^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m \cdot V_C^2}{2}. \quad (6)$$

Скорость центра масс в конце наклонной плоскости найдем из соотношения

$$V_C = a_C \cdot t = \left(\frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \alpha\right) \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot S}{g \cdot \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{4 \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha}{3}}. \quad (7)$$

Из равенства (7) вместо скорости поступательного движения центра масс подставим в выражение (6), получим соотношение для кинетической энергии цилиндра

$$W_k = \frac{3}{2} \cdot \frac{m \cdot \left(\sqrt{\frac{4 \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha}{3}}\right)^2}{2} = m \cdot g \cdot S \cdot \sin \alpha.$$

Пример 18*. Однородный диск радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно положили боковой поверхностью на горизонтальную поверхность и представили самому себе. Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен μ . Найти: 1) время, в течении которого движение цилиндра будет происходить со скольжением; 2) полную работу силы трения.

Решение. Изобразим все силы, с которыми внешние тела действуют на вращающийся диск с начальной угловой скоростью ω_0 . Направление его вращения показано на рисунке. На диск действуют: Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, горизонтальная поверхность с силой реакции \vec{N} и силой трения скольжения $\vec{F}_{тр}$.

Если диск, вращающийся с угловой скоростью ω_0 положить на горизонтальную поверхность, то будет наблюдаться следующий характер движения: под действием силы трения скольжения вращение вокруг оси проходящей через центр масс (точка C), станет равнозамедленным с проскальзыванием, и, кроме того, центр масс цилиндра начнет двигаться равноускоренно с ускорением \vec{a}_C , направленным так, как показано на рисунке.

Через некоторое время проскальзывание прекратится. В этот момент для точек соприкосновения боковой поверхности цилиндра будет выполняться следующее условие: величина вектора скорости поступательного движения $|\vec{V}_C|$ будет равна величине вектора скорости вращательного движения $|\vec{V}_{вр}|$, т.е. $|\vec{V}_C| = |\vec{V}_{вр}|$.

Если последнее равенство продифференцировать по времени, то получим следующее соотношение

$$|\vec{a}_C| = |\vec{a}_\tau|.$$

Это значит, что в момент прекращения проскальзывания ускорение поступательного движения центра масс равно тангенциальному ускорению точек соприкосновения боковой поверхности цилиндра с горизонтальной поверхностью.

Запишем уравнение поступательного движения центра масс цилиндра

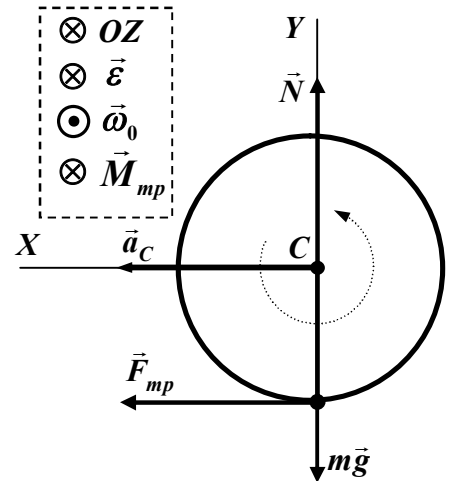
$$m \cdot \vec{a}_C = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}. \quad (1)$$

Для проекций векторов на оси координат, входящих в равенство (1), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} OX: \quad m \cdot |a_C| &= |F_{тр}|, \\ OY: \quad 0 &= |\vec{N}| - |m\vec{g}|. \end{aligned} \quad (2)$$

Решим систему уравнений (2), учтем при этом, что $|\vec{F}_{тр}| = \mu \cdot |\vec{N}|$, получим выражение для ускорения поступательного движения оси вращения

$$|\vec{a}_C| = \mu \cdot |\vec{g}|. \quad (3)$$



*Задача повышенной сложности

Выразим величину скорости поступательного движения центра масс через величину ускорения по формуле, учтем при этом, что начальная скорость поступательного движения равна нулю:

$$|\vec{V}_C| = \mu \cdot |\vec{g}| \cdot t, \quad (4)$$

где t – время проскальзывания цилиндра.

Линии действия силы тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции \vec{N} проходят через ось вращения, следовательно, моменты этих сил относительно этой оси равны нулю. С учетом этого, запишем уравнения вращения цилиндра вокруг оси, проходящей через центр масс

$$J_z \cdot \varepsilon_z = (\vec{M}_{mp})_z \Rightarrow \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \varepsilon_z = |\vec{F}_{mp}| \cdot R \Rightarrow \frac{m \cdot R}{2} \cdot \varepsilon_z = \mu \cdot m \cdot |\vec{g}|. \quad (5)$$

Проекция углового ускорения связана с проекцией угловой скорости следующим соотношением $\varepsilon_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t}$, t – время проскальзывания; ω_z – проекция угловой скорости в момент окончания проскальзывания.

С учетом того, что, $\omega_z = -\omega$ и $\omega_{0z} = -\omega_0$ (см. вставку к рис.), перепишем последнее соотношение в виде $\varepsilon_z = \frac{\omega_0 - \omega}{t}$.

Последнее соотношение для ε_z подставим в равенство (5), получим уравнение

$$\frac{R}{2} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \mu \cdot |\vec{g}|. \quad (6)$$

Угловая скорость ω связана со скоростью движения центра масс соотношением

$$\omega = \frac{|\vec{V}_C|}{R} = \frac{\mu \cdot |\vec{g}| \cdot t}{R}. \quad (7)$$

С учетом этого выражения равенство (6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \cdot \frac{\omega_0 - \frac{\mu \cdot |\vec{g}| \cdot t}{R}}{t} = \mu \cdot |\vec{g}| \Rightarrow R \cdot \left(\omega_0 - \frac{\mu \cdot |\vec{g}| \cdot t}{R} \right) = 2 \cdot \mu \cdot |\vec{g}| \cdot t \Rightarrow \\ 3 \cdot \mu \cdot |\vec{g}| \cdot t = \omega_0 \cdot R \Rightarrow t = \frac{\omega_0 \cdot R}{3 \cdot \mu \cdot |\vec{g}|}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем выражение для времени проскальзывания цилиндра

$$t = \frac{\omega_0 \cdot R}{3 \cdot \mu \cdot |\vec{g}|}. \quad (8)$$

В момент прекращения проскальзывания величина скорости центра масс связана с величиной угловой скорости соотношением $|\vec{V}_C| = \omega \cdot R$.

Выразим величину угловой скорости в момент прекращения проскальзывания ω с величиной начальной угловой скорости ω_0 , для этого время проскальзывания из уравнения (8) подставим в равенство (7), получим следующее выражение

$$\omega = \frac{\mu \cdot |\vec{g}| \cdot \left(\frac{\omega_0 \cdot R}{3 \cdot \mu \cdot |\vec{g}|} \right)}{R} = \frac{\omega_0}{3}. \quad (9)$$

Для вычисления работы силы трения используем теорему об изменении кинетической энергии. Учтем при этом, что сила тяжести и сила реакции работы не совершают, т.к. направления этих сил перпендикулярны перемещению цилиндра.

Запишем выражение для работы силы трения

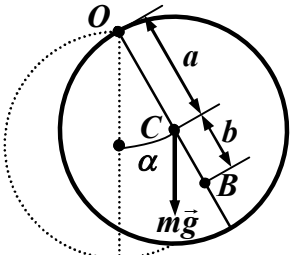
$$A_{\text{тр}} = \left(\frac{m \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_z \cdot \omega^2}{2} \right) - \frac{J_z \cdot \omega_0^2}{2}, \quad (10)$$

где $\left(\frac{m \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_z \cdot \omega^2}{2} \right)$, $\frac{J_z \cdot \omega_0^2}{2}$ конечное и начальное значения кинетической энергии соответственно.

Выразим величину скорости центра масс диска в момент прекращения проскальзывания через угловую скорость, учтем при этом соотношение (10), получим окончательное равенство для работы силы трения

$$A_{\text{тр}} = \left(\frac{m \cdot \left(\frac{\omega_0 \cdot R}{3} \right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{m \cdot R^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{\omega_0}{3} \right)^2}{2} \right) - \frac{\left(\frac{m \cdot R^2}{2} \right) \cdot \omega_0^2}{2} = -\frac{m \cdot (\omega_0 \cdot R)^2}{6}.$$

Варианты заданий для практических занятий

Вариант 1	
<p>⊕ Задача №1. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной 30 см и массой 100 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) его середину; 3) точку, отстоящую от конца стержня на $\frac{1}{3}$ его длины.</p>	
<p>⊕⊕⊕ Задача №2. Однородный диск радиуса R имеет круглый вырез (см. рис.). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей: а) через точку O; б) через его центр масс.</p>	
<p>⊕ Задача №3. Однородный диск радиусом R = 10 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O на нём. Диск отклонили на угол α и отпустили. Определить для начального момента времени угловое ε и тангенциальное a_τ ускорения точки C, находящейся на диске. Вычисления выполнить для следующего случая: $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$.</p>	
<p>⊕⊕ Задача №4. Два тела массами $m_1 = 0,25 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,15 \text{ кг}$ связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. С каким ускорением a движутся тела, и каковы силы T_1 и T_2 натяжения нити по обе стороны от блока? Коэффициент трения μ тела о поверхность стола равен 0,2. Масса m блока равна 0,1 кг и её можно считать равномерно распределённой по ободу. Массой нити и трением в подшипниках оси блока пренебречь.</p>	
<p>⊕⊕⊕ Задача №5. Система состоит из двух одинаковых однородных цилиндров (см. рис.), на которые симметрично намотаны две легкие нити. Найти ускорение оси нижнего цилиндра в процессе движения. Трения в оси верхнего цилиндра нет.</p>	
<p>⊕⊕ Задача №6. Платформа в виде диска радиусом равным R = 1 м вращается по инерции с частотой $n_1 = 6 \text{ мин}^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого m = 80 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен $J = 120 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Момент инерции человека рассчитать как для материальной точки.</p>	
<p>⊕ Задача №7. Сплошной цилиндр массой $m=4 \text{ кг}$ катится без скольже-</p>	

ния по горизонтальной поверхности. Линейная скорость оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию цилиндра.

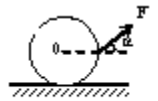
⊕ ⊕ **Задача №8.** Найти линейные скорости движения центров тяжести 1) шара, 2) диска, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости равна 0,5 м, начальная скорость всех тел равна нулю. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости при отсутствии трения.

⊕ ⊕ **Задача №9.** Маховое колесо, имеющее момент инерции равный 245 кг·м², вращается, делая 20 об/сек. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент сил, оно остановилось, сделав 1000 об. Найти: 1) момент сил трения, 2) время, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента сил до полной остановки колеса

⊕ ⊕ **Задача №10.** Карандаш длиной 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша? 2) верхний его конец? Считать, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №11.** Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен μ ?

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №12.** Однородный шар массы 4,0 кг движется поступательно по поверхности стола под действием постоянной силы, приложенной, как показано на рис, где угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между шаром и столом равен 0,20. Найти сиу и ускорение шара.



⊕ ⊕ ⊕ **Задача №13.** Момент импульса частиц относительно некоторой точки O меняется со временем по закону $\vec{L} = \vec{a} + \vec{b} \cdot t^2$, где \vec{a} и \vec{b} – постоянные векторы, причем \vec{a} перпендикулярен \vec{b} . Найти относительно точки O момент \vec{M} силы, действующей на частицу, когда угол между векторами \vec{M} и \vec{L} окажется равен 45° .

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №15.** Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси в противоположном направлении, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2 , а угловые скорости — ω_1 и ω_2 . После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти: а) установившуюся угловую скорость вращения дисков; б) работу, которую совершили при этом силы трения.

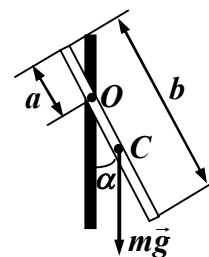
⊕ ⊕ ⊕ **Задача №16.** Сплошной однородный цилиндр радиуса R катится по горизонтальной плоскости, которая переходит в наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (под уклон). Найти максимальное значение скорости V_0 цилиндра, при котором он перейдет на наклонную плоскость еще без скачка. Считать, что скольжения нет.

Вариант 2

⊕ **Задача №1.** Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной равной **60 см** и массой равной **100 г** относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через точку стержня, удаленную на расстоянии **$a = 20$ см** от одного из его концов.

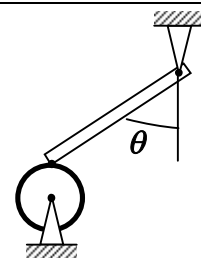
⊕ ⊕ ⊕ **Задача №2.** Вычислить момент инерции: а) медного однородного диска относительно оси симметрии, перпендикулярной к плоскости диска, если его толщина **$b = 12$ мм** и радиус **$R = 100$ мм**; б) однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии, если масса конуса **m** и радиус его основания **R** .

⊕ **Задача №3.** Тонкий однородный стержень длиной **$L = 1$ м** может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку **O** на стержне. Стержень отклонили от вертикали на угол **α** и отпустили. Определить для начального момента времени угловое **ε** и тангенциальное **a_r** ускорения точки **C** на стержне. Вычисления произвести для следующего случая: **$a = \frac{1}{3} \cdot L$** , **$b = L$** , **$\alpha = \frac{\pi}{3}$** .



⊕ ⊕ **Задача №4.** На барабан массой **$M = 9$ кг** намотан шнур, к концу которого привязан груз массой **$m = 2$ кг**. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №5.** В системе, показанной на рис., однородному диску сообщили угловую скорость вокруг горизонтальной оси O, а затем осторожно опустили на него конец A стержня AB так, что он образовал угол **$\theta = 45^\circ$** с вертикалью. Трение имеется только между диском и стержнем, его коэффициент **$k = 0,13$** . Пусть **n_1** и **n_2** – числа оборотов диска до остановки при его вращении по часовой стрелке и против часовой стрелки – при одинаковой начальной скорости. Найти отношение **$\frac{n_1}{n_2}$** .



⊕ ⊕ **Задача №6.** Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массы **$m_1 = 60$ кг**. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса **$m_2 = 120$ кг**. Момент инерции человека рассчитать как для материальной точки.

⊕ **Задача №7.** Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу **2 кг**, катятся без скольжения с одинаковой скоростью **5 м/с**. Определить кинетические энергии этих тел.

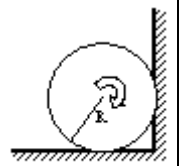
⊕ ⊕ **Задача №8.** Тонкий прямой стержень длиной **1 м** прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол

60° от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость нижнего конца в момент прохождения через положение равновесия.

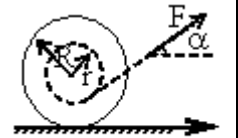
⊕ ⊕ **Задача №9.** Маховик вращается с постоянной скоростью, соответствующей 10 об/с; его кинетическая энергия равна 8000 Дж. За сколько времени вращающий момент сил, равный 50 Н·м, приложенный к этому маховику, увеличит угловую скорость маховика в два раза?

⊕ ⊕ **Задача №10.** По ободу шкива, насаженного на общую ось с маховым колесом, намотана нить, к концу которой подвешен груз в 1 кг. На какое расстояние должен опуститься груз, чтобы колесо со шкивом получило скорость, соответствующую 60 об/мин? Момент инерции колеса со шкивом равен $0,42 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, радиус шкива равен 10 см.

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №11.** Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол (см. рис.). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ . Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?



⊕ ⊕ ⊕ **Задача №12.** На горизонтальной шероховатой плоскости лежит катушка ниток массы m . Ее момент инерции относительно собственной оси $I = \gamma \cdot m \cdot R^2$, где γ – числовой коэффициент, R – внешний радиус катушки. Радиус намотанного слоя ниток равен r . Катушку без скольжения начали тянуть за нить постоянной силой F , направленной под углом α к горизонту (см. рис). Найти: а) проекцию на ось ОХ ускорения оси катушки; б) работу силы F за первые 2 секунды движения.



⊕ ⊕ ⊕ **Задача №13.** В точке, радиус вектор которой относительно начала координат О равен $\vec{r} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$, где a, b, A, B – постоянные, \vec{i}, \vec{j} – орты осей ОХ и ОУ. Найти момент \vec{M} и плечо силы \vec{F} относительно точки О.

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №14.** Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси в одном направлении, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2 , а угловые скорости — ω_1 и ω_2 . После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти: а) установившуюся угловую скорость вращения дисков; б) работу, которую совершили при этом силы трения.

⊕ ⊕ ⊕ **Задача №15.** Сплошному однородному цилиндру массы m и радиуса R сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью ω_0 , затем его положили боковой поверхностью на горизонтальную плоскость и предоставили самому себе. Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен μ . Найти: а) время, в течение которого движение цилиндра будет происходить со скольжением; б) полную работу силы трения скольжения.