==================== ГЛАВА V ====================

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§5.1. Гармонические колебания

Анализируя различные по природе колебания, такие, как колебания груза на пружине, математического маятника, струн, частей машин и механизмов, зданий, мостов и других сооружений, можно прийти к выводу, что все перечисленные колебания имеют общие закономерности и исследуются одними и теми же методами.

Колебательными процессами – **колебаниями -** называются изменения состояния систем, обладающие свойством повторяемости во времени.

Колебания можно классифицировать по условиям возникновения (свободные, вынужденные, автоколебания) и по характеру изменения во времени кинематических характеристик (пилообразные, гармонические, затухающие).

Свободными (собственными) колебаниями называются колебания, которые происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникают вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия.

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Наиболее общими характеристиками колебаний являются следующие физические величины: ***амплитуда колебаний*** A **– наибольшее отклонение колеблющегося тела от положения равновесия** (отклонение величины от ее среднего значения); ***период колебаний*** T **– время, через которое движение тела полностью повторяется** (повторяются все кинематические характеристики колебаний), т.е. совершается одно полное колебание; ***частота колебаний*** ν **– величина, показывающая число колебаний, совершаемых за 1 с.** Вместо частоты ν чаще пользуются понятием циклической частоты ω. ***Циклическая (круговая) частота*** ω **– это число колебаний, совершаемых за** 2π **секунд.** Частота обратно пропорциональна периоду:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \text{и} \qquad \omega = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T}$$

Единицы измерения вышеперечисленных физических величин в системе СИ:

$[T] = c$, $[\nu] = Гц$, $[\omega] = c^{-1}$. Единица амплитуды колебаний зависит от того, какая колеблющаяся физическая величина рассматривается.

Для сравнения колебаний, происходящих с одной частотой, но различающихся по тому, какую стадию полного колебания проходит тело, вводят понятие *фазы колебаний*. ***Фаза колебаний*** определяет величину смещения в момент времени t, ***начальная фаза*** определяет величину смещения в момент начала отсчета времени ($t = 0$). Рассмотрим понятие фазы на простом примере. Если два шарика на нитях одинаковой длины отвести от положения равновесия вправо и отпустить одновременно, то они будут колебаться *в фазе* (синфазно, синхронно), если же развести их в разные стороны и так же одновременно отпустить, то колебания будут происходить *в противофазе*.

При описании колебаний с помощью функции изменения кинематической величины во времени, ***фазой*** $\Phi(t)$ называют аргумент функции, описывающей колебательный процесс, т. е. значение $\Phi(t)$ в момент $t = 0$ начала отсчета времени: $\varphi_0 = \Phi(0)$ **(начальная фаза колебаний).**

При периодических колебаниях зависимость колеблющейся величины s от времени t удовлетворяет условию $s(t+T) = s(t)$.

Уравнение гармонических колебаний

Из всего многообразия колебаний мы рассмотрим лишь частный случай периодических колебаний - гармонические колебания, т. е. такие, в которых колеблющаяся физическая величина изменяется с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону.

Другими словами***, гармоническими называют колебания, в которых интересующая нас величина*** s ***(например, линейное или угловое смещение из положения равновесия) изменяется со временем*** t ***по закону***

$$\boxed{s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)} \tag{5.1}$$

где A – амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi_0$ - фаза, φ_0- начальная фаза, ω - циклическая (круговая) частота колебаний.

Нужно обратить внимание на то, что **фаза колебаний всегда стоит под знаком тригонометрической функции** (синуса или косинуса)**:**

$$\Phi(t) = \varphi = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t .$$

Иногда, в зависимости от поставленной задачи, выражение для гармонически колеблющейся величины $s(t)$ удобнее будет представить в следующей форме, эквивалентной (5.1):

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1), \tag{5.2}$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2$.

Продифференцировав (5.1) можно получить уравнения для определения скорости $\frac{ds}{dt}$ и ускорения $\frac{d^2 s}{dt^2}$

$$\boxed{V(t) = \frac{ds}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2),} \tag{5.3}$$

$$\boxed{a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi),} \tag{5.4}$$

из которых видно, что первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины $s(t)$ также совершают гармонические колебания той же частоты, а амплитуды ds/dt и d^2s/dt^2 соответственно равны $A\omega$ и $A\omega^2$. Начальная фаза ds/dt равна $(\varphi_0 + \pi/2)$, т.е. разность фаз колебаний ds/dt и s постоянна и равна $\pi/2$ (величина ds/dt опережает s по фазе на $\pi/2$). Начальная фаза d^2s/dt^2 равна $(\varphi_0 + \pi)$, т.е. разность фаз колебаний d^2s/dt^2 и s постоянна и равна π (d^2s/dt^2 опережает s по фазе на π). Графики зависимости от времени t величин s, ds/dt и d^2s/dt^2 при гармонических колебаниях для случая $\varphi_0 = 0$ показаны на рис.5.1.

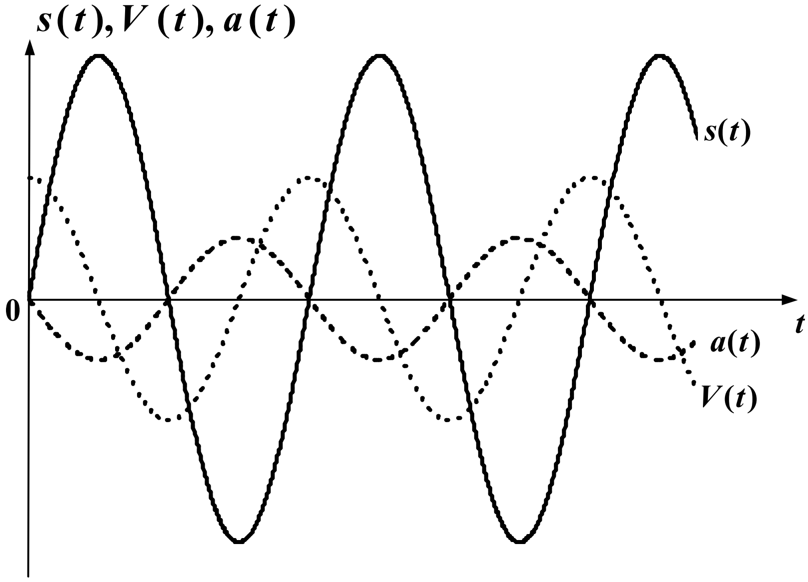


Рис. 5.1

Решив совместно (5.1) и (5.4) получим **дифференциальное уравнение** гармонических колебаний:

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0} \tag{5.5}$$

Для графического изображения гармонических колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды на плоскости пользуются **методом векторных диаграмм.** На плоскости выбирают начало координат O, из которого проводят вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A колебаний и составляет с осью координат OX угол φ_0 равный начальной фазе колебаний в момент времени t=0 (рис. 5.2). В результате равномерного вращения вектора $\vec{A}$ вокруг начала координат O с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний ω угол φ изменяется с течением времени t и соответственно равен $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Проекции вектора $\vec{A}$ на горизонтальную ось в любой момент времени t можно описать с помощью уравнения гармонических колебаний $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Аналогично для вертикальной оси OY получим: $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

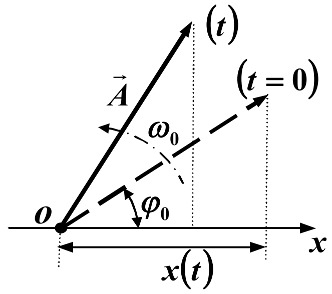


Рис. 5.2

Движение материальной точки по окружности можно также рассматривать как колебания проекции на оси OX и OY около центра окружности, которое происходит по синусоидальному закону, что наглядно демонстрирует рис. 5.3. Здесь по оси абсцисс откладывается время колебания, а по оси ординат - значения проекции радиуса-вектора движущейся точки в соответствующий момент времени.

В случае движения проекции точки по осям OX и OY уравнение колебательного движения запишется соответственно:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

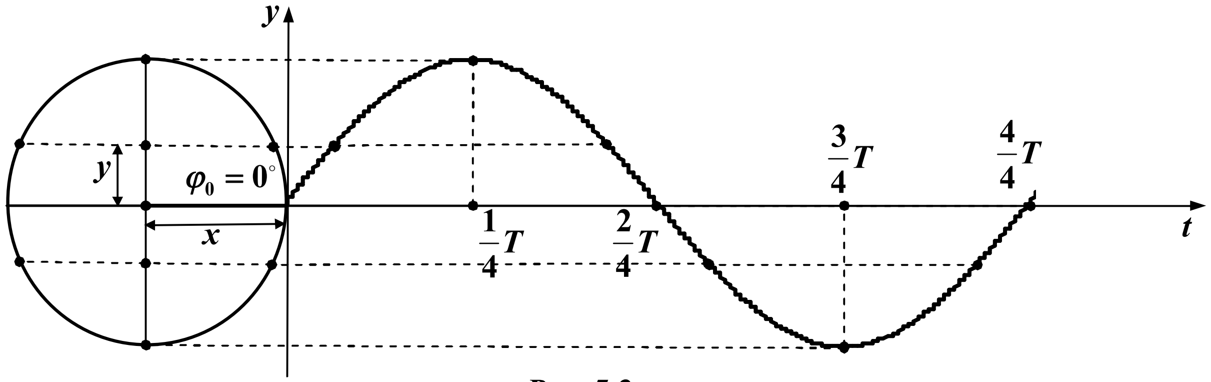


Рис. **5.3**

Вопросы для самоконтроля

1. Какие изменения состояния систем являются колебаниями?
2. Какие колебания называют свободными?
3. Какие колебания называют вынужденными?
4. Перечислите общие характеристики колебаний.
5. Что называют амплитудой колебаний?
6. Что называют периодом колебаний?
7. Дайте определение циклической частоты.
8. Дайте определение фазы и начальной фазы колебаний.
9. В каких единицах в системе СИ измеряется частота колебаний ν?
10. Дайте определение гармонических колебаний.
11. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.
12. Опишите графическое изображение гармонических колебаний с использованием метода векторных диаграмм.
13. Как изменяется с течением времени угол φ в результате равномерного вращения вектора $\vec{A}$ вокруг начала координат O с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний ω?
14. Как вычисляется проекция движения материальной точки по окружности на оси OX и OY?
15. В каких единицах в системе СИ измеряется циклическая (круговая) частота ω?

Примеры решения задач

Пример 1. *Какой путь за* $\Delta t = {}^{11}\!/_{6}\,c$ *после начала движения пройдет материальная точка, совершающая гармонические колебания по закону* $x = 0.004\sin(\pi t + 1/6\pi)$*?*

Решение. *Как следует из закона движения, материальная точка будет совершать колебания с частотой* $\omega_0 = \pi\ рад/c$, *периодом* $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2c$ *и амплитудой* $A = 0.004м$. *Поскольку при гармонических колебаниях материальная точка возвращается в исходное положение через промежутки времени, равные периоду колебаний, то при движении она обязательно разворачивается. Как известно, в точках разворота скорость частицы равна нулю. Зависимость скорости частицы* V *от времени* t *найдем, взяв производную по времени от закона движения:* $V = \dfrac{dx}{dt} = 0.004\pi\cos(\pi t + 1/6\pi).$

В точках разворота $V(t_p) = 0$, *т.е.* $0 = 0.004\pi\cos(\pi t_p + 1/6\pi).$

Следовательно, материальная точка будет менять направление движения в моменты времени, удовлетворяющие условию $\pi t_p + 1/6\pi = 1/2\pi + n\pi,$ где $n = 0,1,2\ldots$

Отсюда находим $t_{p1} = 1/3c$; $t_{p2} = 4/3c$; $t_{p3} = 7/3c$ *и т.д.*

Поскольку за время от $t_0 = 0$ *до* $\tau = \Delta t$ *материальная точка совершает два разворота (в моменты времени* t_{p1}, *и* t_{p2}*), то путь, пройденный частицей за время* Δt

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$

где ΔS_1 *- путь, пройденный от начала движения* t_0 *до момента разворота* t_{p1}; ΔS_2 *- путь, пройденный от момента* t_{p1} *до момента времени* t_{p2}; ΔS_3 *- путь, пройденный от момента* t_{p2} *до момента времени* τ *:*

$$\Delta S_1 = |x(t_{p1}) - x(t_0)|; \qquad \Delta S_2 = |x(t_{p2}) - x(t_{p1})|; \qquad \Delta S_3 = |x(\tau) - x(t_{p2})|; \qquad \text{или}$$

$$\Delta S_1 = |0.004\sin(\pi t_{p1} + 1/6\pi) - 0.004\sin(\pi t_0 + 1/6\pi)| = |0.004\sin(1/2\pi) - 0.004\sin(1/6\pi)|;$$

$$\Delta S_1 = 0.002м,$$

$$\Delta S_2 = |0.004\sin(\pi t_{p2} + 1/6\pi) - 0.004\sin(\pi t_{p1} + 1/6\pi)| = |0.004\sin(3/2\pi) - 0.004\sin(1/2\pi)|$$

$$\Delta S_2 = 0.008м$$

$$\Delta S_3 = |0.004\sin(\pi\tau + 1/6\pi) - 0.004\sin(\pi t_{p2} + 1/6\pi)| = |0.004\sin(2\pi) - 0.004\sin(3/2\pi)|$$

$\Delta S_3 = 0.004м$ *Следовательно,* $\boxed{\Delta S = 0.014м}$.

Ответ: $\Delta S = 0.014м$.

Пример 2. *Материальная точка в процессе гармонических колебаний движется с максимальной скоростью* $V_{max} = 0.02\,м/c$, *и максимальным ускорением* $a_{max} = 0.01\,м/c^2$. *Определить циклическую частоту и амплитуду колебаний, а также скорость частицы в момент времени, когда ее смещение относительно положения равновесия равно половине максимального.*

Решение. *Смещение частицы относительно положения равновесия в произвольный момент времени* t *определяется уравнением гармонических колебаний*

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (1)$$

Дважды последовательно продифференцировав (1) по времени, получим зависимости скорости и ускорения частицы от времени:

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha). \qquad a = \dot{V} = \ddot{x} = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2{}_0\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (2)$$

Из уравнений (2) следует, что максимальные значения скорости и ускорения частицы, совершающей гармонические колебания, равны соответственно:

$$V_{max} = A\omega_0 \qquad a_{max} = A\omega_0^{\,2} \qquad (4)$$

Следовательно, циклическая частота и амплитуда колебаний

$$\boxed{\omega_0 = \frac{a_{max}}{V_{max}}} \qquad \omega_0 = 0.5\,рад/с \qquad \boxed{A = \frac{V^2{}_{max}}{a_{max}}} \qquad A = 0{,}04м$$

Чтобы найти скорость частицы в момент времени, соответствующий определенному положению частицы, получим зависимость скорости частицы от ее координаты; Для этого исключим время в уравнениях (1) и (2), переписав их в виде

$$\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{x^2}{A^2}, \qquad \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{V^2}{A^2\omega_0^2}$$

и, сложив (используя основное тригонометрическое тождество), получим:

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{V^2}{A^2\omega_0^2} \qquad \text{отсюда находим} \qquad V = \omega_0\sqrt{A^2 - x^2},$$

или с учетом выражения для циклической частоты ω_0 *и условия задачи(* $x = \frac{1}{2}\cdot A$*)*

$$V = \omega_0\sqrt{A^2 - \frac{1}{4}A^2} = \frac{\omega_0 A\sqrt{3}}{2}, \text{ окончательно получим} \qquad \boxed{V = \frac{V_{max}\sqrt{3}}{2}} \qquad V \approx 0{,}0173\,{}^{м}\!/\!{}_{с}$$

Ответ: $\omega_0 = 0.5\,рад/с$*;* $A = 0{,}04м$*;* $V \approx 0{,}0173\,{}^{м}\!/\!{}_{с}$.

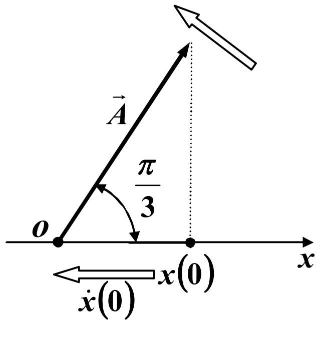
Пример 3. *Точка совершает колебания по закону* $x = A\cos(\omega t + \varphi)$*, где* $A = 4см$*. Определить начальную фазу* φ*, если:* $x(0) = 2см$*,* $\dot{x}(0) < 0$*. Построить векторную диаграмму для момента времени* $t = 0$.

Решение. *Воспользуемся уравнением движения* $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ *и выразим смещение* $x(0)$ *в момент времени* $t = 0$ *через начальную фазу:*

Отсюда найдем начальную фазу: $\qquad \varphi = \arccos\dfrac{x(0)}{A}$

Подставим в это выражение заданные значения $x(0)$ *и* A*:* $\varphi = \arccos\frac{2}{4}$*. Значению аргумента (* $\frac{1}{2}$ *) удовлетворяют два значения угла:* $\qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ *и* $\varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$.

Для того чтобы решить, какое из этих значений угла φ *удовлетворяет еще и условию* $\dot{x}(0) < 0$*, найдем сначала* $\dot{x}(t)$*:* $\qquad \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$.



Подставив в это выражение значение t*=0 и, поочередно, значения начальных фаз* $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ *и* $\varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$*, найдем*

$$\dot{x}(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}A\cdot\omega \text{ и } \dot{x}_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A\cdot\omega.$$

Так как всегда $A>0$ *и* $\omega>0$*, то условию* $\dot{x}(0) < 0$ *удовлетворяет только первое значение начальной фазы. Таким образом, искомая начальная фаза* $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$.

По найденному значению φ *построим векторную диаграмму (см. рис.)*

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

§5.2. Сложение гармонических колебаний

При наличии нескольких колебательных систем можно получить результирующее колебание, которое и будет являться результатом сложения нескольких колебательных процессов. Полученные результирующие колебания можно классифицировать как сложение колебаний одинакового направления либо сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний

Классическим примером сложения двух колебаний одинакового направления являются колебания двух грузиков на пружинах скрепленных последовательно. Грузик 1, будет колебаться относительно грузика 2 на пружине, к которой прикреплен, и вместе с ним на пружине, к которой прикреплен грузик 2.

Рассмотрим два гармонических колебания $x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$, для сложения которых воспользуемся вышерассмотренным методом векторных диаграмм. На рис. 5.4 показаны векторы $A_1(t)$ и $A_2(t)$ амплитуд первого и второго колебаний в произвольный момент времени *t*, когда фазы этих колебаний равны $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$ и $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$. Результирующим колебаниям $x = x_1 + x_2$ соответствует вектор $\vec{A}(t) = \vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)$, проекция которого на ось OX:

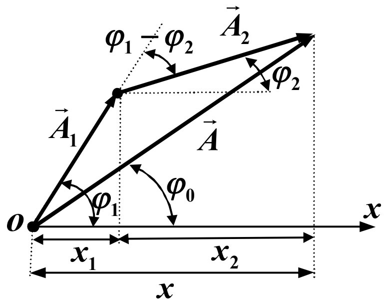


***Рис.* 5.4**

$$x = A(t)\cos\Phi(t) \qquad (5.6)$$

Для дальнейшего рассмотрения введем следующее определение: **колебательные процессы называются когерентными колебаниями, если они согласованно протекают во времени так, что разность их фаз остается постоянной.**

Из данного определения можно сделать вывод, что два гармонических колебания когерентны, если их циклические частоты одинаковы, т.е. $\omega_2 = \omega_1 = \omega$. В любой момент времени разность фаз когерентных гармонических колебаний равна разности их начальных фаз: $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \varphi_2 - \varphi_1$. Соответственно результирующие колебания – гармонические, с такой же циклической частотой ω, т. е.

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (5.7)$$

Из рисунка видно, что результирующая амплитуда в скалярном виде запишется как

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (5.8)$$

а начальную фазу результирующего колебания можно определить из следующего соотношения:

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (5.9)$$

Амплитуда A результирующих колебаний будет изменяться в зависимости от разности начальных фаз складываемых колебаний в следующих пределах:

$$\textbf{\textit{от}} \quad A = |A_1 - A_2| \quad \textbf{\textit{при}} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$$

$$\textbf{\textit{до}} \quad A = A_1 + A_2 \quad \textbf{\textit{при}} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi,$$

где $m = 0,1,2\ldots$ - любое целое неотрицательное число. Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, то колебания **синфазны** (находятся **в одной фазе**), а если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$, - находятся **в противофазе.**

В случае, если у складываемых гармонических колебаний, частоты будут различны ($\omega_2 \neq \omega_1$) (а, следовательно, они **некогерентны,** так как разность их фаз $(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$ непрерывно изменяется с течением времени), результатом сложения таких колебаний будут негармонические результирующие колебания. Используя метод векторных диаграмм, можно заметить, что векторы амплитуд $\vec{A}_1$ *и* $\vec{A}_2$ складываемых колебаний (рис. 5.4) вращаются с разными угловыми скоростями, а построенный на них параллелограмм непрерывно деформируется, и его диагональ - вектор $\vec{A}$ результирующих колебаний - изменяется по длине и вращается с переменной угловой скоростью.

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами ($|\omega_2 - \omega_1| << \omega_1$), будут получаться негармонические колебания называемые **биениями**.

Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д. Он заключается в определении частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями, и наиболее широко применяется на практике, как метод сравнения измеряемой величины с эталонной.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Рассмотрим некоторую материальную точку, которая способна совершать одновременно вдоль осей OX и OY колебания, описываемые гармоническими законами:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \\ y &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \end{aligned} \tag{5.10}$$

где x и y — декартовы координаты точки. Для того, чтобы определить уравнение траектории результирующего движения материальной точки в плоскости XOY, необходимо решить систему этих уравнений, избавившись при этом от параметра t. Преобразуем систему уравнений (5.10):

$$x / A_1 = \sin(\omega t + \varphi_1) = \sin\omega t \cdot \cos\varphi_1 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_1,$$

$$y / A_2 = \sin(\omega t + \varphi_2) = \sin\omega t \cdot \cos\varphi_2 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_2,$$

откуда:

$$\sin\omega t = \frac{(x/A_1)\cdot\sin\varphi_2 - (y/A_2)\cdot\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1},$$

$$\cos\omega t = \frac{(x/A_1)\cdot\cos\varphi_2 - (y/A_2)\cdot\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1}.$$

Тогда,

$$\left[\frac{x}{A_1}\cdot\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cdot\sin\varphi_1\right]^2 + \left[\frac{x}{A_1}\cdot\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cdot\cos\varphi_1\right]^2 = (\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1)^2$$

После несложных преобразований получаем уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2\cdot x\cdot y}{A_1\cdot A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \sin^2(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (5.11)$$

Траектория имеет форму эллипса (рис. 5.5), причем точка описывает этот, эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний $T = 2\pi/\omega$. Поэтому результирующее движение точки называют **эллиптически поляризованными колебаниями.**

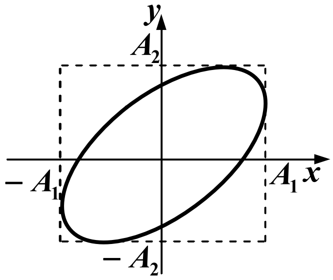


***Рис.* 5.5**

Ориентация в плоскости *XOY* осей эллипса, а также его размеры зависят от амплитуд A_1 и A_2 складываемых колебаний и разности их начальных фаз $\varphi_2-\varphi_1$. Если $\varphi_2-\varphi_1 = (2m+1)\pi/2$, где $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, то оси эллипса совпадают с осями координат OX и OY, а размеры его полуосей равны амплитудам A_1 и A_2:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (5.12)$$

Если, кроме того, $A_1 = A_2$, то траектория точки представляет собой окружность. Такое результирующее движение точки называют **циркулярно поляризованными колебаниями** или **колебаниями, поляризованными по кругу.**

В тех случаях, когда $\varphi_2-\varphi_1 = m\cdot\pi$ ($m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$), эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$y = \pm\frac{A_2}{A_1}\cdot x. \qquad (5.13)$$

Знак плюс соответствует четным значениям m, т. е. сложению синфазных колебаний (рис. 5.6а), а знак минус— нечетным значениям m, т. е. сложению колебаний, происходящих в противофазе (рис. 5.6б). В этих случаях точка совершает **линейно поляризо-**

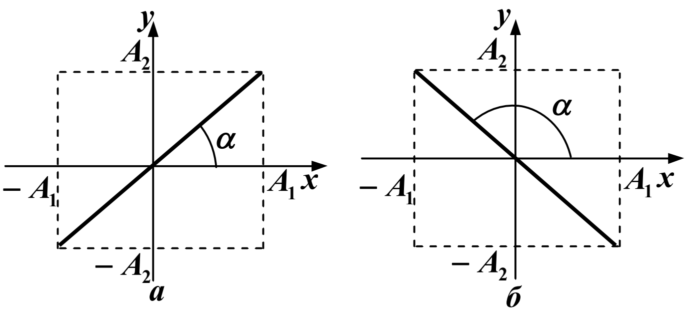


***Рис.* 5.6**

ванные колебания. Она гармонически колеблется с частотой складываемых колебаний и амплитудой $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ вдоль прямой линии, составляющей с осью $\boldsymbol{OX}$ угол $\alpha = arctg\left(\frac{A_2}{A_1}\cos m\pi\right)$.

В рассмотренных случаях, складываемых взаимноперпендикулярных колебаний, получались фигуры ограниченные прямоугольником со сторонами равные $2A_1$ и $2A_2$.

Фигуры Лиссажу

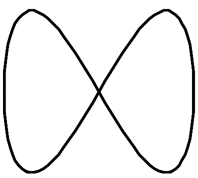
Фигуры Лиссажу - замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Фигуры Лиссажу можно наблюдать с помощью осциллографа, подавая одновременно на вход X и вход Y (горизонтальные и вертикальные отклоняющие пластины) переменные напряжения кратных частот.

В случае сложения двух кратных частот взаимноперпендикулярных колебаний получаем соответствующие фигуры Лиссажу:

Пример. *Получить фигуры Лиссажу:*

а) при кратности частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}=2$

$$x=\sin\omega t \qquad y=\sin(2\omega t+\varphi)$$



а)

Решая совместно, избавляемся от временной зависимости

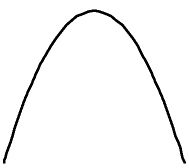
$$y=\sin 2\omega t\cdot\cos\varphi+\cos 2\omega t\cdot\sin\varphi$$

$$y=2\sin\omega t\cdot\cos\omega t\cdot\cos\varphi+\left(1-2\sin^2\omega t\right)\cdot\sin\varphi$$

$$y=2x\sqrt{1-x^2}\cdot\cos\varphi+\left(1-2x^2\right)\cdot\sin\varphi$$

если $\varphi=0$ *получаем «седло» (рис. а):*

$$\boxed{y=\pm 2x\sqrt{1-x^2}}$$



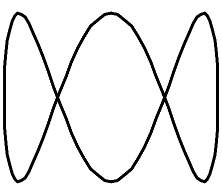
б)

если $\varphi=\frac{\pi}{2}$ *получаем обратную параболу (рис. б):*

$$\boxed{y=1-2x^2}$$

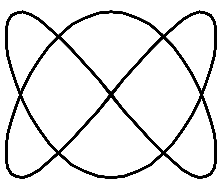
б) при кратности частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}=3$

получаем фигуру Лиссажу типа «короны с тремя пиками» (рис. в):



в)

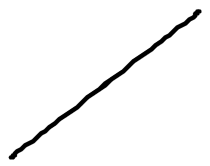
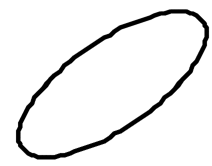
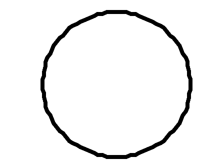
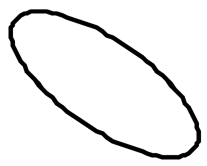
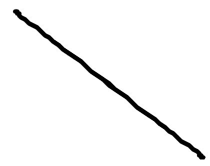
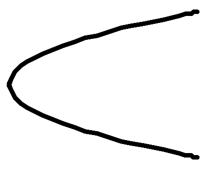
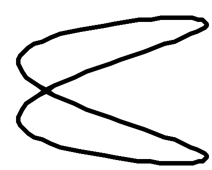
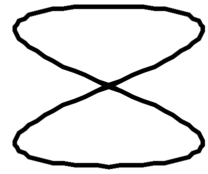
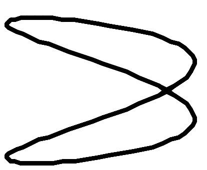
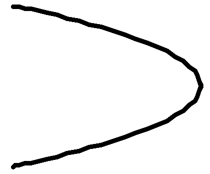
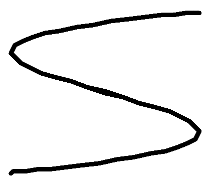
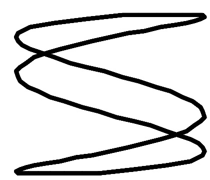
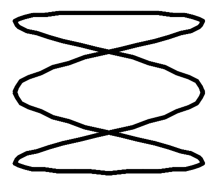
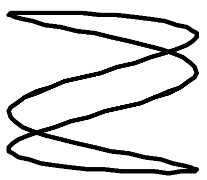
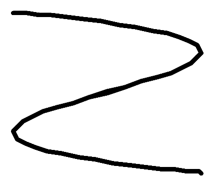
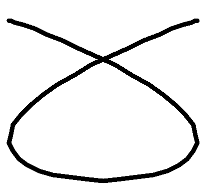
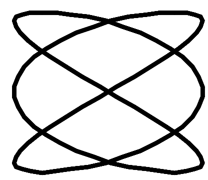
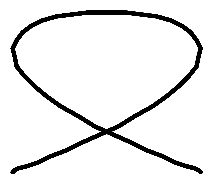
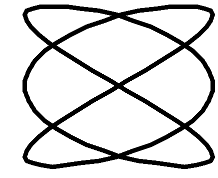
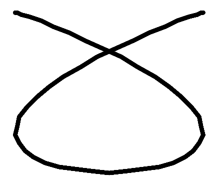
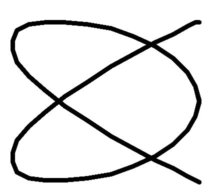
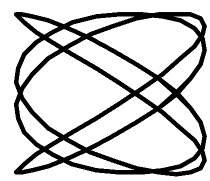
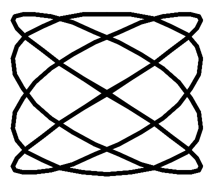
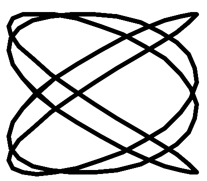
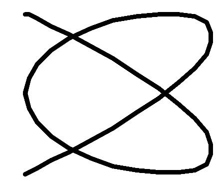
в) при кратности частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{3}{2}$ *получаем кардиоиду (рис. г):*



г)

В таблице 5.1 приведены фигуры Лиссажу при различной кратности и разности фаз складываемых частот:

Фигуры Лиссажу *Таблица 5.1.*

	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = \frac{3\pi}{4}$	$\varphi = \pi$
$\frac{1}{1}$					
$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$					
$\frac{2}{3}$					
$\frac{3}{4}$					

Для того, чтобы получить фигуру Лиссажу, можно использовать графический метод, который заключается в следующем: строят графики двух складываемых взаимноперпендикулярных гармонических колебаний с кратными частотами, а затем снимают значения координат x и y в одинаковые моменты времени t после чего наносят точки на график зависимости $y(x)$ (см. рис. 5.7).

При нанесении точек необходимо учитывать то, что заканчивать эту процедуру необходимо не раньше того времени, которому соответствует больший период из двух складываемых колебаний.

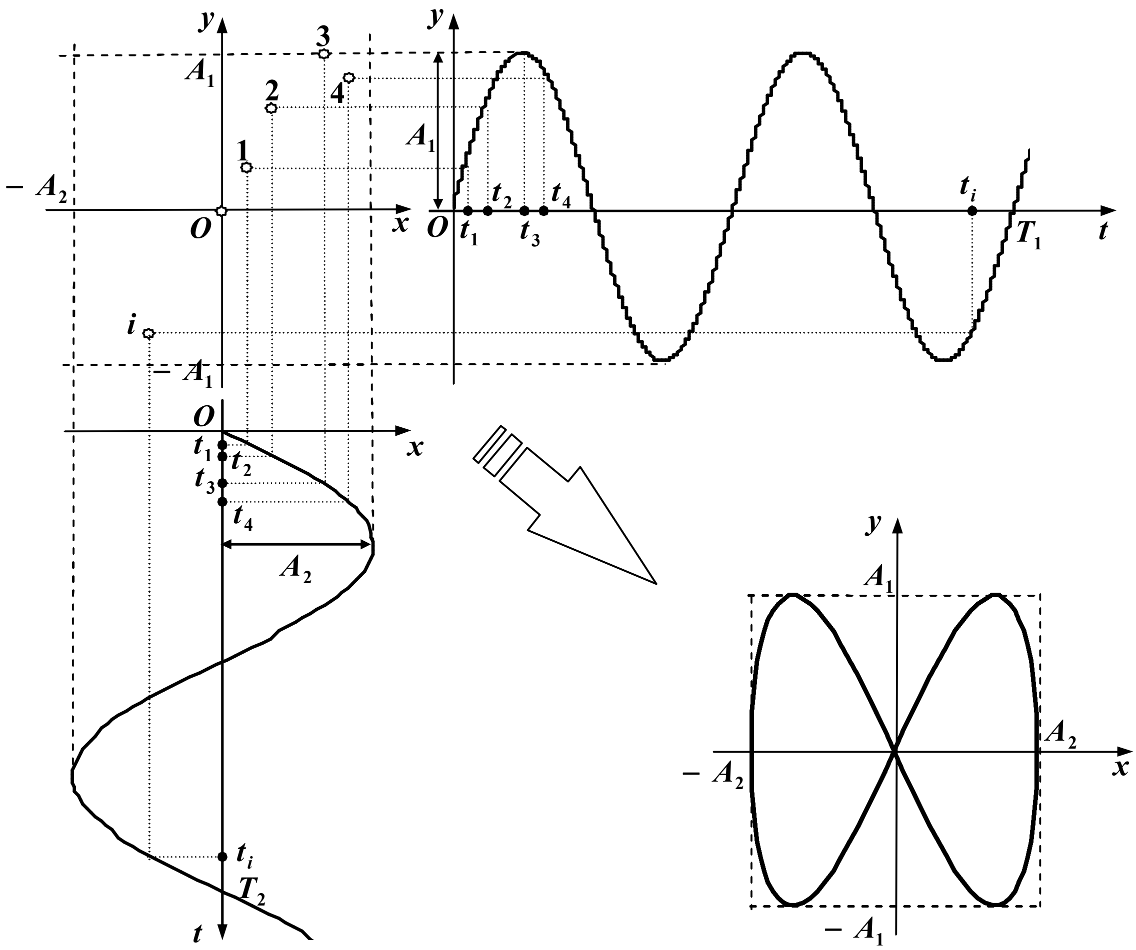


***Рис*. 5.7**

Однако практическое значение имеет обратная задача, которая позволяет определить кратность складываемых колебаний, т.е. зная значение частоты одного колебания, можно определить неизвестную частоту по нижеприведенной формуле:

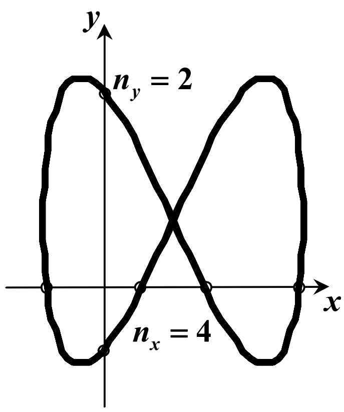


***Рис*. 5.8**

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{n_x}{n_y} \qquad (5.14)$$

где n_y, n_x – число пересечений фигурой Лиссажу осей y и x соответственно, ν_y, ν_x - частоты складываемых взаимноперпендикулярных колебаний (пример на рис. 5.8).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют результирующими колебаниями и как их можно классифицировать?
2. Дайте определение когерентных колебаний.
3. В чем заключается метод биений?
4. В каких пределах будет изменяется амплитуда A результирующих колебаний в зависимости от разности начальных фаз складываемых колебаний?
5. Результатом сложения каких колебаний являются негармонические результирующие колебания?
6. Какие колебания называют биениями?
7. Что называют эллиптически поляризованными колебаниями?
8. Опишите графическое изображение эллиптически поляризованных колебаний.
9. В каком случае эллипс вырождается в отрезок прямой?
10. В каком случае траектория точки представляет собой окружность?
11. В каких случаях уравнению $y = \pm(A_2 / A_1) \cdot x$ соответствует знак плюс, а в каких – минус?
12. Результатом каких колебаний являются фигуры Лиссажу? С помощью какого прибора мы можем их наблюдать?

Примеры решения задач

Пример 4. *Точка совершает колебания по закону* $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ *где* $A = 4см$. *Определить начальную фазу* φ, *если* $x(0) = 2см$ *и* $\dot{x}(0) < 0$. *Построить векторную диаграмму для момента* $t = 0$.

Решение. *Воспользуемся уравнением движения и выразим смещение в, момент* $t = 0$ *через начальную фазу:* $x = A \cdot \cos\varphi$.

Отсюда найдем начальную фазу: $\varphi = \arccos\left(\frac{x(0)}{A}\right)$.

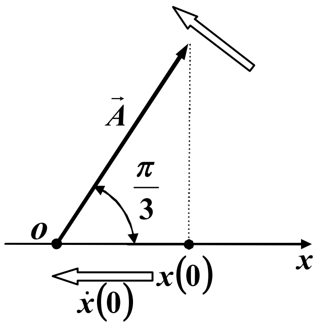
Подставим в это выражение заданные значения $x(0)$ *и* A: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{4}\right)$. *Значению аргумента* $\left(\frac{1}{2}\right)$ *удовлетворяют два значения угла:*

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} \text{ и } \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

Для того чтобы решить, какое из этих значений угла φ *удовлетворяет еще и условию* $\dot{x}(0) < 0$, *найдем сначала* $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Подставив в это выражение значение $t = 0$ *и поочередно значения начальных фаз* $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ *и* $\varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$, *найдем*



$$\dot{x}_1(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\omega \ \text{ и } \ \dot{x}_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A\cdot\omega.$$

Так как всегда $A > 0$ *и* $\omega > 0$, *то условию* $\dot{x}(0) < 0$ *удовлетворяет только первое значение начальной фазы. Таким образом, искомая начальная фаза*

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}.$$

По найденному значению φ построим векторную диаграмму (см. рис.).

Пример 5. *Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями* $x = A_1\cos\omega t$ *и* $y = A_2\sin\omega t$, *где* $A_1 = 2см$, $A_2 = 1см$. *Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения.*

Решение. *Пусть точка одновременно колеблется вдоль осей координат* OX *и* OY *по законам:*

$$x = A_1\sin(\omega t + \varphi_1),$$

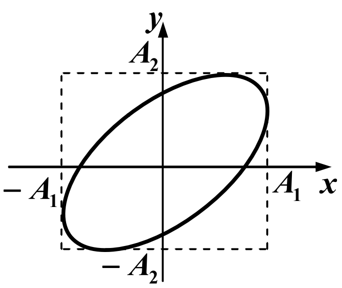
$$y = A_2\sin(\omega t + \varphi_2),$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2},\ \varphi_2 = 0$$

где x *и* y *- декартовы координаты точки. Уравнение траектории результирующего движения точки в плоскости* XOY *можно найти, исключив из выражений для* x *и* y *параметр* t:

$$x/A_1 = \sin(\omega t + \varphi_1) = \sin\omega t\cos\varphi_1 + \cos\omega t\sin\varphi_1,$$

$$y/A_2 = \sin(\omega t + \varphi_2) = \sin\omega t\cos\varphi_2 + \cos\omega t\sin\varphi_2,$$



Откуда

$$\sin\omega t = \frac{(x/A_1)\sin\varphi_2 - (y/A_2)\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1},$$

$$\cos\omega t = \frac{(x/A_1)\cos\varphi_2 - (y/A_2)\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1}.$$

Тогда

$$\left[\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1\right]^2 + \left[\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1\right]^2 = (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - c$$

После несложных преобразований получаем уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Траектория имеет форму эллипса(см. рис.), причем точка описывает этот, эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний $T = 2\pi/\omega$.

Ориентация в плоскости XOY *осей эллипса, а также его размеры зависят от амплитуд* A_1 *и* A_2 *складываемых колебаний и разности их начальных фаз* $\varphi_2 - \varphi_1$. *Если* $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\pi/2$, *где* $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *то оси эллипса совпадают с осями координат* OX *и* OY, *а размеры его полуосей равны амплитудам* A_1 *и* A_2*:* $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$

Подставив числовые значения, окончательно получим: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Ответ: $T = 0{,}86c$

§5.3. Механические гармонические колебания. Гармонический осцилятор.
Динамика гармонических колебаний

Рассмотрим некоторую материальную точку, которая совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат OX. За начало координат выберем положение равновесия для данной точки. Зависимость координаты x точки от времени t имеет вид:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{5.15}$$

Из определения скорости υ и ускорения получим следующие соотношения проекций для материальной точки на ось OX

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{5.16}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -a_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{5.17}$$

где $V_0 = A\omega$ - **амплитуда скорости**; $a_0 = A\omega^2 = V_0\omega$ - **амплитуда ускорения.**

С учетом второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ выразим силу, действующую на материальную точку

$$F_x = -m\omega^2 x, \tag{5.18}$$

где m – масса материальной точки. Из данного соотношения видно, что сила $\vec{F}$ пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону:

$$\boxed{\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot x \cdot \vec{i}} \tag{5.19}$$

где $\vec{i}$ - орт оси OX.

Такого рода зависимость силы от смещения характерна для упругой силы, поэтому силы иной физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называются **квазиупругими**.

Механическая энергия гармонических колебаний

С учетом выше полученной формулы (5.19) рассмотрим **кинетическую энергию** материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания:

$$W_к = \tfrac{1}{2} mV^2 = \tfrac{1}{2} mV_0^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) \tag{5.20}$$

или $$W_к = \tfrac{1}{4} m\omega^2 A^2[1 + \cos^2(2\omega t + 2\varphi_0)]. \tag{5.21}$$

Проанализировав данные соотношения можно сделать вывод, что кинетическая энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до $m\omega^2 A^2/2$, совершая гармонические колебания с циклической частотой 2ω и амплитудой $m\omega^2 A^2/4$ около среднего значения, равного $m\omega^2 A^2/4$.

Учитывая (5.18) получим следующее выражение для расчета **потенциальной энергии** материальной точки, гармонически колеблющейся под действием квазиупругой силы:

$$W_П = -\int_0^x F_x dx = {}^1\!/_2\, m\omega^2 x^2 = {}^1\!/_2\, m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \qquad (5.22)$$

или

$$W_П = {}^1\!/_4\, m\omega^2 A^2[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_0)] = {}^1\!/_4\, m\omega^2 A^2[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0 + \pi)]. \qquad (5.23)$$

Проанализировав данные соотношения, можно сделать вывод, что значения потенциальной энергии материальной точки периодически изменяются от 0 до ${}^1\!/_2\, m\omega^2 A^2$, совершая гармонические колебания с циклической частотой 2ω и амплитудой ${}^1\!/_4\, m\omega^2 A^2$ около среднего значения, равного ${}^1\!/_4\, m\omega^2 A^2$. Из соотношений (5.21) и (5.23) можно утверждать, что колебания потенциальной и кинетической энергии совершаются со сдвигом по фазе на π, так что полная механическая энергия материальной точки не изменяется при гармонических колебаниях (что и подтверждает ЗСПМЭ):

$$W = W_К + W_П = {}^1\!/_2\, m\omega^2 A^2 = const. \qquad (5.24)$$

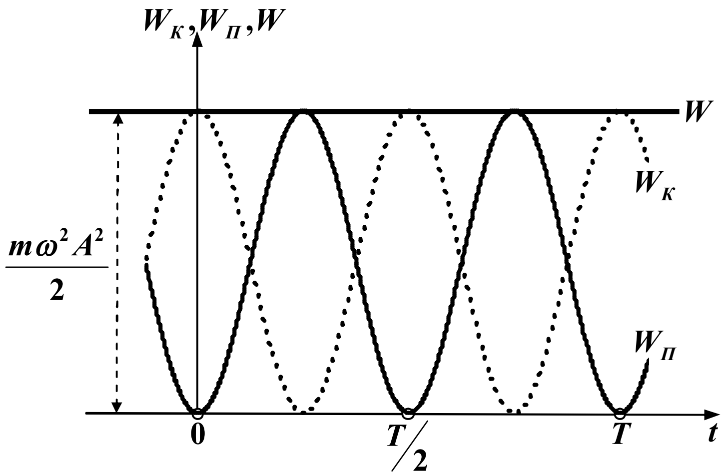


Рис. 5.9

С учётом соотношений (5.20), (5.22) и (5.24) можно построить графики зависимостей $W_К, W_П, W$ от времени t для случая $\varphi_0 = 0$, которые отражены на рис. 5.9.

Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (5.25)$$

решением которого, является уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (5.26)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники при малых амплитудах колебаний.

Рассмотрим эти системы, совершающие свободные гармонические колебания.

Пружинный маятник

Пружинным маятником называется груз массой m, укреплённый на абсолютно упругой, невесомой пружине, совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$, где k – жесткость пружины.

Далее мы найдём период колебаний T этого маятника. Если грузик смещён из нулевого положения (в котором пружина не деформирована) на расстояние x, то на грузик со стороны пружины будет действовать сила $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$. Помимо этого, на грузик действует сила тяжести $m \cdot \vec{g}$. Согласно второму закону Ньютона, сумма всех сил, приложенных к грузику, равна $m \cdot \vec{a}$, где $\vec{a}$ - ускорение. Таким образом, сделав проекцию на ось направленную вдоль траектории движения данного маятника, мы можем записать дифференциальное уравнение для пружинного маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$$

где g - ускорение свободного падения в гравитационном поле, $\frac{d^2x}{dt^2}$ - вторая производная координаты x по времени t. Это уравнение имеет следующее решение:

$$x = A \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_0\right] + \frac{mg}{k}$$

Из полученной формулы видно, что ***период колебаний пружинного маятника*** равен

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \qquad (5.27)$$

а угловая частота ω, соответственно равна $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Эти формулы справедливы в пределах выполнения закона Гука, то есть при малых деформациях пружины, а так же при условии, что масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Амплитуда колебаний A и фаза колебаний φ зависят от начальных условий (в момент времени $t = 0$) - начального смещения грузика x_0 и начальной скорости V_0. В состоянии равновесия пружина растянута на величину $\frac{mg}{k}$.

Пример. Предположим, что колеблющийся грузик связан с маркером, который рисует линию на бумажной ленте. Если лента движется равномерно в горизонтальном направлении, то маркер будет рисовать на ней синусоиду (косинусоиду). Зная скорость движения ленты и период синусоиды, мы можем вычислить период колебаний грузика на пружине.

Физический маятник

Физическим маятником называется твёрдое тело, которое совершает колебания под действием своей силы тяжести $m\vec{g}$ вокруг неподвижной горизонтальной оси OZ, не проходящей через центр тяжести тела и называемой ***осью качания маятника***. Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс C (рис.5.17). Точка O пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр тяжести маятника и перпендикулярной оси качания, называется ***точкой подвеса маятника***.

Если силами трения в подвесе маятника можно пренебречь, то вращательный момент относительно оси качания маятника создает только его сила тяжести $m\vec{g}$ (момент силы реакции опоры равен нулю, так как сила реакции проходит через ось маятника). Отклонение маятника от положения равновесия характеризуется углом φ, образованным прямой OC с вертикалью (рис.5.10). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент $\vec{M}$, равный по величине $m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi$. Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия ($\varphi = 0$). Рассматривая φ как вектор, связанный с направлением поворота правилом правого винта, видим, что векторы $\vec{\varphi}$ и $\vec{M}$ направлены в противоположные стороны (рис.5.10). Проекция вектора $\vec{M}$ на ось OZ будет отрицательна:

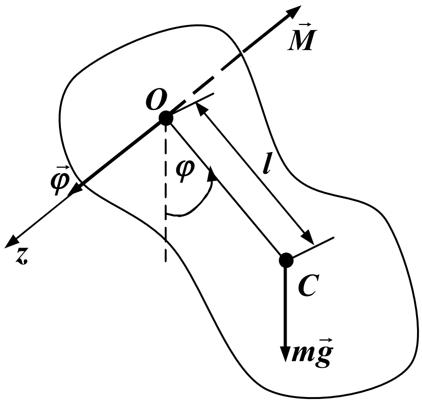


Рис 5.10

$$M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi . \tag{5.28}$$

$l = |OC|$ - расстояние от центра масс маятника до оси качания.

Мы знаем, что основной закон динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид: $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}$,

где J - момент инерции маятника, ε - его угловое ускорение.

С учетом того, что угловое ускорение - это вторая производная угла поворота по времени и уравнения (5.28) запишем для маятника уравнение вращательного движения:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi,$$

Разделив левую и правую часть на J - момент инерции маятника, последнее уравнение можно привести к виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0 \tag{5.29}$$

Уравнение (5.29) имеет решение, представимое только в виде рядов. При малых отклонениях от положения равновесия $\sin\varphi \approx \varphi$ и уравнение (5.29) примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0. \tag{5.30}$$

Если ввести обозначение

$$\frac{mgl}{J} = \omega_0^2, \tag{5.31}$$

Можно свести уравнение (5.30) к уравнению свободных гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{5.32}$$

решение которого имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 + \alpha), \tag{5.33}$$

где φ_0 - амплитуда колебаний угла φ, α - начальная фаза. Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение физического маятника от положения равновесия изменяется со временем по гармоническому закону.

Как следует из (5.31) циклическая частота малых колебаний физического маятника равна: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$, а период связан с ней соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Решая совместно, окончательно получим, что ***период колебаний физического маятника*** равен:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}} \tag{5.34}$$

Отметим, что если амплитуда колебаний физического маятника не мала, его период уже не описывается простой формулой (5.34). Для больших углов отклонений маятника период начинает зависеть от амплитуды. Решив уравнение (5.29), можно эту зависимость представить в виде убывающего ряда:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right]. \tag{5.35}$$

По формуле (5.35) нетрудно оценить границы применимости теории малых колебаний маятника. С хорошим приближением при углах $\varphi_0 < 60^\circ$ можно использовать только два слагаемых в формуле (5.35); для амплитуд $\varphi_0 < 8^\circ$ справедливо выражение (5.34).

Математический маятник

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити и совершающей колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Из данного определения видно, что вся масса тела сосредоточена в одной точке (центре масс), следовательно математический маятник можно представить как частный случай физического маятника. Если подставить в уравнение для периода колебаний физического маятника (5.34) момент инерции для материальной точки $J = m \cdot l^2$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}},$$

окончательно получим выражение для ***периода малых колебаний математического маятника***:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{5.36}$$

Таким образом, математический маятник при небольших отклонениях от вертикали $(\alpha \leq 10°)$ будет также совершать гармонические колебания по закону $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, .

Вопросы для самоконтроля

1. Какого рода зависимость силы от смещения характерна для упругой силы?
2. Какие силы называют квазиупругими?
3. Как изменяется кинетическая энергия материальной точки совершающей гармонические колебания?
4. Как изменяется потенциальная энергия материальной точки совершающей гармонические колебания?
5. Как изменяется полная механическая энергия материальной точки совершающей гармонические колебания?
6. Охарактеризуйте систему называемую гармоническим осциллятором.
7. Приведите примеры гармонического осциллятора.
8. Дайте определение пружинного маятника.
9. Каков период колебаний пружинного маятника?
10. Дайте определение физического маятника.
11. Какая точка является точкой подвеса маятника?
12. Как определить направление вращательного момента?
13. Каков период малых колебаний физического маятника?
14. Дайте определение математического маятника.
15. Каков период малых колебаний математического маятника?

Примеры решения задач

Пример 6. *Колебания материальной точки происходят согласно уравнению* $x = A\cos\omega t$*, где* $A = 8см$*,* $\omega = \frac{\pi}{6}c^{-1}$*. В момент, когда возвращающая сила* F *в первый раз достигла значения* $-5мН$*, потенциальная энергия* $П$ *точки стала равной* $100мкДж$*. Найти этот момент времени* t *и соответствующую ему фазу* ωt*.*

Решение. *Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки:*

$$W_n = \frac{2\pi^2 A^2 m \cdot \cos^2\left(2\pi \cdot t/T\right)}{T^2} \tag{1}$$

Получим:

$$\cos^2\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = \frac{W_n \cdot T^2}{2\pi^2 \cdot A^2 \cdot m} \tag{2}$$

Силу, действующую на точку, выразим по второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3}$$

где a *- ускорение точки, которое получим, взяв вторую производную по времени от координаты:*

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad или \qquad a = \frac{(-4)\pi^2 A \cdot \cos^2\left(2\pi \cdot t/T\right)}{T^2}$$

Подставив выражение ускорения в формулу (3), получим:

$$m = \frac{F \cdot T^2}{(-4) \cdot \pi^2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right)} \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в формулу (2), получим:

$$\cos^2\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = \frac{W_n \cdot T^2 \cdot (-4) \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right)}{2\pi^2 \cdot A^2 \cdot F \cdot T^2}; \qquad \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = \frac{W_n \cdot (-2)}{A \cdot F}$$

Подставив числовые значения, получим: $\cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$$

$$t = \frac{\pi \cdot T}{2\pi \cdot 3} = \frac{T}{6} \tag{5}$$

Циклическая частота: $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

откуда $$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{6}$$

Подставим выражение (6) в формулу (5), получим:

$$\boxed{t = \frac{2\pi}{6 \cdot \omega}}$$

Подставив числовые значения получим: $t = 2c$; $\boxed{\omega \cdot t = \frac{\pi}{3}}$

Ответ: $t = 2c$; $\omega \cdot t = \frac{\pi}{3}$

Пример 7. *На стержне длиной* l *=30 см укреплены два одинаковых грузика: один - в середине стержня, другой - на одном из его концов. Стержень с грузиком колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину* L *и период* T *колебаний такой системы. Массой стержня пренебречь.*

Решение. *Период колебаний физического маятника, каким является стержень с грузами, определяется соотношением*

$$T = 2\pi\sqrt{J/(Mgl_c)}, \qquad (1)$$

где J *- момент инерции маятника относительно оси колебаний;* M *- его общая масса;* l_c *- расстояние от центра масс маятника до оси.*

Момент инерции данного маятника равен сумме моментов инерции грузиков J_1 *и* J_2 *и стержня* J_3*:*

$$J = J_1 + J_2 + J_3. \qquad (2)$$

Принимая грузики за материальные точки, выразим моменты их инерции: $J_1 = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$*;* $J_2 = m_2 l^2$*. Так как* $m_{cm} << m$*, то его момент инерции* $J_3 = 0$*. Подставив полученные выражения* J_1*,* J_2 *и* J_3 *в формулу (2), найдем общий момент инерции физического маятника:*

$$J = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 l^2 + 0$$

$$J = \frac{5}{4}\cdot m \cdot \ell^2 \qquad (3)$$

Масса маятника:

$$M = m_1 + m_2 = 2m \qquad (4)$$

Расстояние l_c *центра масс маятника от оси колебаний найдем, исходя из следующих соображений. Если ось* x *направить вдоль стержня и начало координат совместить с точкой подвеса, то искомое расстояние* l_c *равно координате центра масс маятника:*

$$l_c = x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1(l/2) + m_2 l}{m_1 + m_2}, \text{ или } l_c = \frac{3\cdot ml}{2\cdot 2m}$$

$$l_c = \frac{3\cdot l}{4} \qquad (5)$$

Подставив выражения (3), (4), (5) в формулу (1), найдем период колебания маятника относительно оси вращения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5\cdot m\cdot \ell^2\cdot 4}{4\cdot m\cdot g\cdot 3\cdot \ell}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{5\cdot \ell}{3\cdot g}}}$$

Произведя расчеты по формуле, получим период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5\cdot 0{,}3}{3\cdot 9{,}8}} \qquad T = 1{,}4c.$$

Приведенная длина физического маятника:

$$L = \frac{J}{m \cdot \ell_c} \qquad (6)$$

Подставив выражение (3), (5) в формулу (6), найдем приведенную длину физического маятника:

$$L = \frac{5 \cdot m \cdot \ell^2 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot m \cdot \ell} \qquad \boxed{L = \frac{5 \cdot \ell}{3}}$$

Подставив значение l, *окончательно получим:* $L = 0.5м$

Ответ: $T = 1{,}4c$; $L = 0.5м$

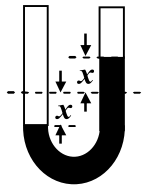
Пример 8. *Определить период колебаний столбика ртути в U - образной трубке при выведении его из положения равновесия (см. рис.). Площадь сечения трубки* S, *масса ртути* m. *Плотность ртути* ρ. *Трением ртути о стенки трубки пренебречь.*

Решение. *Колебания совершает вся масса ртути. Уровень ртути в каждом колене колеблется около положений равновесия, который соответствует равным высотам ртути в коленах. Сила, вызывающая колебания, - сила тяжести столба ртути высотой* $2x$:

$$F = -\Delta mg = -2xS\rho g$$

Уравнение движения (второй закон Ньютона) можно записать в данном случае так:

$$m\ddot{x} = -2xS\rho g$$



где $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ *- ускорение ртути массой m.*

Преобразуя уравнение (1) к виду

$$\ddot{x} + \left(\frac{2S\rho g}{m}\right)x = 0,$$

и сравнивая его с дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

легко определим частоту собственных колебаний ртути в трубке:

$$\omega_0^2 = \frac{2S\rho g}{m}.$$

Используя связь между циклической частотой ω *и периодом* T

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

найдем период колебаний

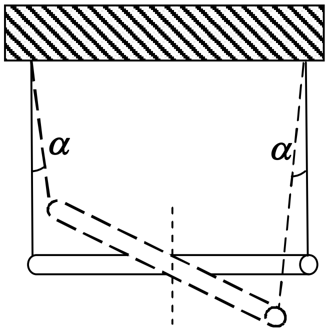
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}} \qquad T \approx 0{,}75c.$$

Проверим размерность выражения (2) по размерностям входящих величин:

$$[T] = \left[\left(\frac{kг}{м^2}\right) \div \left(\frac{кгм}{м^3c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = c$$

Ответ: $T \approx 0{,}75c$

Пример 9. *Однородный стержень подвешен за концы на двух параллельных нитях одинаковой длины* L*. Определить период крутильных колебаний стержня, возникающих при повороте стержня на малый угол относительно вертикальной оси, проходящей через центр стержня (см.рис.)*



Решение: *При повороте стержня вокруг вертикальной оси возникает возвращающий момент сил натяжения относительно вертикальной оси, проходящий через центр масс. Момент сил будет возвращать стержень в исходное положение - положение равновесия. Однако, в момент прохождения положения равновесия (нити вертикальны), стержень будет обладать некой кинетической энергией, за счет которой повернется в противоположную сторону; затем процесс многократно повторится. Вращающий момент создает горизонтальная составляющая силы натяжения нити:*

$$M_{(F_н)} = -F_н \cdot \sin\alpha \cdot d \qquad (1)$$

где $F_н$ *- сила натяжения нити;*

α *- угол отклонения нити от вертикали;*

$\frac{d}{2}$ *- расстояние от точки приложения силы натяжения до оси вращения (центра масс стержня).*

Вертикальные составляющие сил натяжения нитей уравновешивают силу тяжести стержня:

$$2F_H \cos\alpha = mg \qquad (2)$$

Угол отклонения нити от вертикали α *и угол отклонения стержня от начального положения можно связать равенством*

$$\alpha \cdot L = \varphi \frac{d}{2}, \qquad (3)$$

где d *- длина стержня.*

По условию, угол φ*, а, следовательно, и угол* α *малы; поэтому положим, что*

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &\approx \alpha \\ \cos\alpha &\approx 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Представляя условие (4) и соотношение (3) в выражении (1), получим:

$$M_{(F_н)} = -\frac{F_н \cdot d^2 \cdot \varphi}{4L} \qquad (5)$$

Знак минус указывает на то, что момент горизонтальной составляющей силы натяжения с $M_{(F_н)}$ *стремится уменьшить угол* φ *. Выражение (2) с учетом условия (4) дает:*

$$F_H = \frac{mg}{2} \tag{6}$$

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2M_{(F_н)} \tag{7}$$

Где J *- момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его центр масс.*

Учитывая, что момент инерции стержня J *относительно его центра масс равен* $\frac{md^2}{12}$ *; а также воспользовавшись соотношениями (5) и (6), получим:*

$$\left(\frac{md^2}{12}\right)\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\left(\frac{mg}{2}\right)\cdot\left(\frac{d^2}{4L}\right)\cdot\varphi \tag{8}$$

Преобразуя (8), найдем уравнение, определяющее характер движения стержня:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{3g}{L}\right)\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{3g}{L}\varphi = 0 \tag{9}$$

Из этого уравнения следует, что циклическая частота собственных колебаний стержня равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{10}$$

Период гармонических колебаний T *, соответственно, определяется выражением*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}} \tag{11}$$

Малые крутильные колебания стержня описываются законом:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{3g}{L}}t + \beta\right)$$

где φ_0 *- амплитуда, а* β *- начальная фаза колебаний.*

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}$

§5.4. Затухающие колебания

Если колебания некоторой системы описываются уравнением (5.1) и на систему не действуют никакие внешние силы, то она может совершать колебания бесконечно долго. Однако в действительности всегда имеется трение (или другое сопротивление движению), которое вызывает затухание колебаний. Поэтому более реальным типом колебаний являются затухающие колебания.

Затухающими колебаниями называются свободные колебания, амплитуда которых убывает с течением времени вследствие невосполнимой потери энергии колебательной системой.

В механической системе причиной затухания является трение. Дифференциальное уравнение движения, описывающее затухающие механические колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (5.37)$$

где x - изменяющаяся во времени физическая величина,

β - коэффициент затухания,

ω_0 - собственная частота колебательной системы.

Решение этого уравнения имеет вид

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi) \qquad (5.38)$$

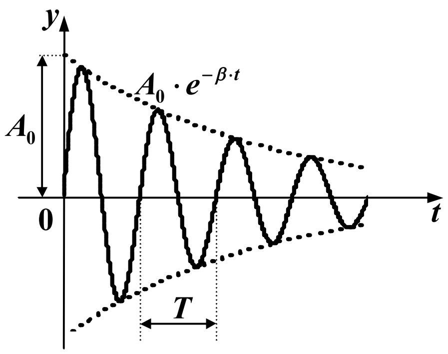


Рис. **5.11**

где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ - частота затухающих колебаний, A_0 и φ постоянные величины, значения которых зависят от начальных условий, т.е. от значений x и $\frac{dx}{dt}$ в начальный момент времени $t=0$.

График затухающего колебания представлен на рис. 5.11.

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по экспоненциальному закону:

$$A(t)=A_0e^{-\beta t} \qquad (5.39)$$

где A_0 - начальная амплитуда,

β - коэффициент затухания.

Закон затухания колебаний зависит от свойств колебательной системы, а скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания

$$\beta=\frac{r}{2m}, \qquad (5.40)$$

где r - коэффициент трения,

m - масса колеблющейся точки.

Время релаксации - промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз.

$$\tau=\frac{1}{\beta}$$

Затухающие колебания (5.37) не являются периодическими, так как максимальное значение колеблющейся величины x, достигаемое в некоторый момент времени t_1, в последующем (при $t > t_1$) никогда не повторяется. Однако при затухающих колебаниях величина x обращается в нуль, изменяясь в одну и ту же сторону (например, убывая), а также достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}} \tag{5.41}$$

Величины T и ω поэтому обычно называют **периодом (условным периодом) и циклической частотой (условной циклической частотой) затухающих колебаний.**

Если сопротивление среды мало ($\beta^2 << \omega_0^2$), тогда период $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Физическая величина

$$A = A_o e^{-\beta t} \tag{5.42}$$

называется **амплитудой затухающих колебаний,** соответственно A_0 - **начальной амплитудой.**

Логарифмический декремент затухания λ - величина, равная натуральному логарифму отношения значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$\boxed{\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}} \tag{5.43}$$

где N_e — число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени, и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β.

Добротность колебательной системы:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e},$$

где λ - логарифмический декремент затухания.

Добротность пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых системой за время τ, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Пример. *В реальных условиях на осциллятор действует сила трения, прямопропорциональная скорости движения грузика:* $F = r \cdot V$. *В нашем случае (пружинного маятника) эта сила возникает из-за сопротивления воздуха и неупругих свойств того материала, из которого изготовлена пружина. В результате, амплитуда колебаний будет со временем уменьшаться. Уравнение* ***свободного гармонического осциллятора с затуханием*** *может быть записано следующим образом:*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=mg$$

где r *- коэффициент трения, где* k *– жесткость пружины. Разделив левую и правую часть уравнения на* m *и, введя дополнительные переменные* $2\beta=\frac{r}{m}$ *и* $\Omega^2=\frac{k}{m}$*, получим:*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\Omega^2x=g$$

где β *- коэффициент затухания. В случае, когда* $\Omega^2>\beta^2$ *уравнение колебаний свободного гармонического осциллятора с затуханием имеет следующее решение:*

$$x=A\cdot e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi)$$

При этом период колебаний зависит от коэффициента затухания β *:*

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\Omega^2-\beta^2}}}$$

В заключение нужно отметить, что при увеличении коэффициента затухания β, период затухающих колебаний растет и, если $\beta=\omega_0$, обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t\to\infty$. Такой процесс не является колебательным. Он называется **апериодическим.**

Вопросы для самоконтроля

1. Чем обусловлено введение понятия «затухания» и коэффициента затухания?
2. Какой процесс называется апериодическим?
3. Как период колебаний зависит от коэффициента затухания β ?
4. Почему период и циклическую частоту затухающих колебаний правильнее называть условным периодом условной циклической частотой?
5. Дайте определение затухающих колебаний. Почему затухающие колебания называют реальными?
6. Чем характеризуется добротность колебательной системы?
7. Дайте определение логарифмического декремента затухания.
8. Чем определяется время релаксации?
9. Какой процесс называют апериодическим?
10. Запишите уравнение свободного гармонического осциллятора с затуханием.

Примеры решения задач

Пример 10. *Амплитуда затухающих колебаний маятника за время* $t_1 = 5мин$ *уменьшилась в два раза. За какое время* t_2, *считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?*

Решение. *Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени*

$$A(t) = A_0 e^{-\beta \cdot t} \qquad \text{преобразуем} \qquad \frac{A_0}{A_1} = e^{\beta \cdot t_1}$$

Логарифмируем $\ln 2 = \beta \cdot t_1$

Выразим коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{\ln 8}{5} \tag{1}$$

Для времени t_2: $\dfrac{A_0}{A_2} = e^{\beta \cdot t_2}$

Логарифмируем: $\ln 8 = \beta \cdot t_2$

$$t_2 = \frac{\ln 8}{\beta} \tag{2}$$

Подставив (1) в (2) окончательно получим: $\boxed{t_2 = \dfrac{\ln 8}{\ln 2} \cdot 5}$

Подставив значение времени, окончательно получим:

$t_2 = 14{,}85c$

Ответ: $t_2 = 14{,}85c$

[1]***Пример 11.*** *В начальный момент* $t = 0$ *смещение осциллятора равно* x_0, *причём* $x_0 > 0$. *Найти начальную скорость* $\dot{x}_0$, *при которой данное смещение окажется равным амплитуде, если время релаксации осциллятора равно* τ .

Решение. *Амплитуда смещения изменяется по закону* $A(t) = A_0 e^{-\beta \cdot t}$. *Смещение в момент времени* $t = 0$ *равно амплитуде* $(x_0 = A)$ *лишь в том случае, если начальная скорость* $\dot{x}_0 = \dfrac{dA}{dt}$, *т.е. наклоны графиков* $x(t)$ *и* $A(t)$ *в момент времени* $t = 0$ *одинаковы. Отсюда* $\dot{x}_0 = -\beta \cdot x_0$.

Окончательно получим $\boxed{\dot{x}_0 = -\dfrac{x_0}{\tau}}$

Ответ: $\dot{x}_0 = -\dfrac{x_0}{\tau}$

[1] Задача повышенной сложности

§5.5. Вынужденные механические колебания

Возможность поддерживать колебания незатухающими представляет огромный интерес для технической науки. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания -** незатухающие колебания, которые поддерживаются в системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания *принципиально* отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без действия сил, а также от вынужденных колебаний, происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями). Другими словами, в системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии. Тем самым, поддерживаются собственные колебания, которые не затухают. В случае автоколебаний система как бы сама себя подталкивает.

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Часы снабжены храповым механизмом, с помощью которого маятник получает небольшие толчки в такт собственным колебаниям. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза.

Если колебательная система подвергается воздействию внешней периодической силы, то возникают так называемые вынужденные колебания, имеющие незатухающий характер. Вынужденные колебания следует отличать от автоколебаний. В случае вынужденных колебаний система подталкивается посторонней силой.

При действии на затухающий осциллятор внешней силы, изменяющейся во времени по закону синуса с частотой ω, через некоторое время установятся гармонические колебания на частоте внешней вынуждающей силы.

Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты ω имеет резонансный характер, т.е. резко возрастает при приближении ω к собственной частоте осциллятора ω_0.

Пример. *Вынужденные колебания пружинного маятника. Маятник колеблется вдоль оси* $\boldsymbol{X}$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний простейшей линейной системы - пружинного маятника, происходящих под влиянием переменной внешней силы $\vec{F}(t)$ *имеет вид:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \left(\frac{F_0}{m}\right)\cos\omega t,$$

где β *- коэффициент затухания,*

ω_0 *- собственная частота колебательной системы,*

ω *- частота вынуждающей силы, изменяющейся со временем по закону*

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos\omega t$$

Решение этого неоднородного уравнения есть сумма двух решений.

1. Общего решения однородного уравнения

$$x_1 = A_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

ω' *- частота затухающих колебаний (не путать с* ω *- частотой вынуждающей силы).*

2.Частного решения неоднородного уравнения

$$x_2 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Установившиеся колебания описываются частным решением и представляют собой гармонические колебания с частотой вынуждающей силы:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t - \varphi)$$

где A *- амплитуда установившегося колебания*

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Отставание по фазе вынужденного колебания от обусловившей его вынуждающей силы, т.е. сдвиг фаз, определяется формулой

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

где β *- коэффициент затухания,*

ω_0 *- собственная частота,*

ω *- частота вынуждающей силы.*

Резонанс - явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы ω к собственной частоте системы ω_0

Частота, при которой наступает резонанс, называется **резонансной**, и определяется соотношением

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Амплитуда резонансного колебания

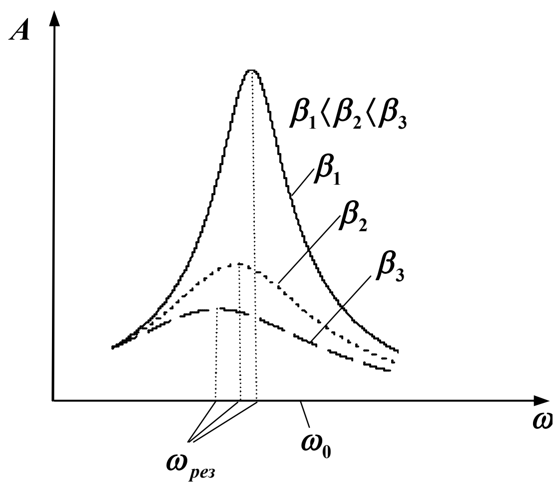


Рис. 5.12

$$A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Графики зависимости A от ω показаны на рис. 5.12.

С увеличением коэффициента затухания максимум резонансных кривых понижается. Видно, что амплитуда колебаний существенно возрастает по мере приближения частоты внешней силы к частоте собственных колебаний.

При резонансе амплитуда колебаний должна быть бесконечно большой. В действительности же при резонансе амплитуда вынужденных колебаний всегда конечна. Это объясняется тем, что в резонансе и вблизи него наше допущение о пренебрежимо малом сопротивлении становится неверным. Если даже сопротивление в системе и мало, то в резонансе оно существенно. Его наличие делает амплитуду колебаний в резонансе конечной величиной. Чем больше сопротивление в системе, тем ниже максимум амплитуды в точке резонанса.

При слабом затухании, $\beta << \omega_0$,

$$A_{рез} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0},$$

$$\omega_{рез} \approx \omega_0$$

и значение φ при резонансе можно считать равным $\pi/2$. При $\beta \to 0$ сдвиг фаз стремится к 0 для частот $\omega < \omega_0$ и к π для $\omega > \omega_0$. Частоте ω_0 соответствует $\varphi = \pi/2$.

Явления резонанса могут приносить как вред, так и пользу. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение автоколебаний. Приведите пример.
2. Чем автоколебания принципиально отличаются от вынужденных колебаний?
3. Дайте определение резонанса.
4. Приведите пример вынужденных механических колебаний и внешней вынуждающей силы.
5. Что делает амплитуду колебаний в резонансе конечной величиной?

§5.6. Волны в упругой среде

Упругие волны

Если тело колеблется в упругой среде, то соседние с ним частицы также будут колебаться. Колебания частиц через силы упругости передается соседним частицам и т.д. Через некоторое время колебания распространятся по всей среде.

Упругие волны - механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде. **Источники волны** - тела, которые, воздействуя на среду, вызывают эти возмущения.

Звуковые (акустические) волны - упругие волны малой интенсивности. Звуки воспринимаются ухом человека, если их частота лежит в интервале от 20 Гц до 20 кГц. Не воспринимаемые на слух колебания с частотой ниже 20 Гц называют инфразвуком, а выше 20 кГц - ультразвуком.

Однородная среда - среда, физические свойства которой не изменяются от точки к точке.

Изотропная среда - среда, физические свойства которой одинаковы во всех направлениях.

Анизотропная среда - среда, физические свойства которой различны в различных направлениях.

Среды, однородные и изотропные в отношении одних физических свойств, могут быть не изотропными в отношении других свойств. Например, монокристалл, однородный по своим упругим свойствам, оптически неоднородный для рентгеновских лучей; кристаллы с кубической решёткой оптически изотропны, а в отношении упругих свойств они анизотропны.

Бегущие волны - волны, переносящие энергию в пространстве.

Упругая волна называется **гармонической** (т.е. синусоидальной), если соответствующие ей колебания среды являются гармоническими.

Фронт волны (волновой фронт) - геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t.

Волновая поверхность - геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей существует бесконечное множество (они неподвижны), а волновой фронт в каждый момент времени один (он все время перемещается).

Волны бывают плоские, сферические, цилиндрические (в зависимости от формы волновой поверхности).

Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся в положительном направлении оси X:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \alpha\right],$$

где A - амплитуда волны, ω - циклическая (круговая) частота волны,
α - начальная фаза волны (определяется выбором начала отсчета x и t),

$\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha$ - фаза волны, V — скорость распространения волны, x - путь, пройденный волной за время t.

Волновое число $\kappa=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{V}$

где λ - длина волны - расстояние, на которое распространяется синусоидальная волна за время, равное периоду, ω - круговая частота, V - скорость распространения волны.

Волновой вектор - вектор $\vec{\kappa}$, модуль которого равен волновому числу. Направлен он по нормали к волновой поверхности.

В плоской волне, волновые поверхности (где точки среды колеблются в одинаковой фазе) имеют вид плоскостей. Когда говорят, что плоская волна распространяется вдоль оси X, то это надо понимать так, что ее волновые поверхности (плоскости) перпендикулярны этой оси. Уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором $\vec{\kappa}$:

$$\xi\left(\vec{r},t\right)=A\cos\left(\omega t-\vec{\kappa}\vec{r}\;+\alpha\right)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения, α - фаза колебаний в начале координат (в точке $r=0$) при $t=0$.

Уравнение сферической синусоидальной волны имеет вид

$$\xi\left(\vec{r},t\right)=\frac{A}{r}\cos\left(\omega t-\vec{\kappa}\vec{r}\;+\alpha\right)$$

где A - постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице; α - начальная фаза колебаний в центре волны;

$\left(\omega t-\vec{\kappa}\vec{r}\;+\alpha\right)$ - фаза сферической волны.

Это уравнение справедливо лишь для r, превышающих размеры источника. Тогда источник можно считать точечным, а возбуждаемые им волны - сферическими.

Волновое уравнение

Волновое уравнение - дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее распространение волн в однородной изотропной среде:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad \text{или} \qquad \Delta\xi=\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где ξ - физическая величина, характеризующая возмущение, распространяющееся в среде со скоростью V, Δ - оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}.$$

В частности, для плоской волны волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

где x - направление распространения плоской волны, V - скорость распространения волны. Решение волнового уравнения:

$$\xi\left(\vec{r},t\right) = A\cos\left(\omega t - \vec{\kappa}\,\vec{r} + \alpha\right),$$

где A - амплитуда волны,

$\vec{\kappa}$ - волновой вектор,

α - начальная фаза колебаний.

Фазовая скорость

Фазовая скорость - скорость распространения синусоидальных волн. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы. Для плоской волны из условия $\omega t - \kappa x + \alpha = const$ следует

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}$$

где ω — циклическая частота,

κ — волновое число.

Для сферической волны из условия $\omega t - \kappa r + \alpha = const$ следует

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}$$

где ω — циклическая частота, κ - волновое число.

Фазовая скорость волны зависит от свойств среды, в которой она распространяется.

Скорость распространения поперечных волн вдоль натянутой струны

$$V = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot S}},$$

где F - сила натяжения струны, ρ - плотность материала струны, S - площадь ее поперечного сечения.

Скорость распространения поперечных (сдвиговых) волн в изотропном твердом теле

$$V = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G - модуль сдвига среды, ρ - ее плотность.

Скорость распространения продольных упругих волн в изотропном твердом теле

$$V=\sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{1-\mu}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)}},$$

где E — модуль Юнга (модуль упругости первого рода),

ρ - плотность среды (вещества тела), μ — коэффициент Пуассона.

Скорость распространения продольных упругих волн в тонком стержне

$$V=\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E - модуль Юнга материала стержня, ρ - плотность материала стержня.

Скорость распространения продольных (звуковых) волн в жидкости и газе

$$V=\sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

где K - модуль объемной упругости среды, ρ - плотность невозмущенной среды.

а) в идеальном газе

$$V=\sqrt{\frac{\gamma\cdot p_0}{\rho}}=\sqrt{\gamma\frac{R\cdot T}{M}},$$

где γ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к его теплоёмкости при постоянном объеме, p_0 - среднее давление газа, R - универсальная газовая постоянная, M - молярная масса газа.

б) В воздухе

$$V=20.1\sqrt{T}\ м/с\approx(331+0{,}6t)м/с,$$

где T — термодинамическая температура (измеренная по шкале Кельвина), t — температура (измеренная по шкале Цельсия).

В таблицах 5.2 и 5.3 приведены скорости распространения волн в некоторых веществах.

Скорость звука в некоторых веществах, $^{м}\!/_{с}$ *Таблица 5.2.*

Газ	$0^\circ C$	$20^\circ C$	Жидкость	$20^\circ C$
Воздух	331	343	**Вода**	1490
Азот	334	346	**Морская вода**	1530
Кислород	316	327	**Спирт**	1180

Гелий	965	981	**Ртуть**	145 3
Водород	1284	1328	**Глицерин**	192 3

Скорость распространения упругих волн в твердых телах, $^{м}/_{с}$

Таблица 5.3.

Твердое вещество	**Продольные волны**	**Поперечные волны**	**Волны в стержне**
Кварц	5970	3762	5760
Стекло	3760-4800	2380-2560	3490-4550
Золото	3220	1200	2030
Латунь	4600	2080	3450

Энергия упругой волны

Энергия упругой волны состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц и потенциальной энергии упругой деформации. Кинетическая энергия, заключенная в малом объеме ΔV среды:

$$\Delta W^k = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V,$$

где $\rho\Delta V$ — масса элементарного объема, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ - скорость его движения.

Потенциальная энергия этого объёма

$$\Delta W^n = \frac{\rho \vartheta^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V,$$

где $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ - деформация, ϑ — фазовая скорость волны.

Полная энергия, объема ΔV:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \vartheta^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V.$$

Плотность энергии упругой волны:

$$w = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \vartheta^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Так как $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \alpha)$,

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -Ak\sin(\omega t - kx + \alpha)$, а $k^2 \vartheta^2 = \omega^2$, то плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской волны:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

Среднее по времени значение плотности энергии в данной точке среды равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 ,$$

где ρ - плотность среды, A - амплитуда волны, ω - циклическая частота.

Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией, доставляемой от источника колебаний в различные точки среды этой волной.

Волна переносит энергию.

Поток энергии — количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени.

$$\Phi = \frac{dW}{dt}$$

$[\Phi] = Вт(ватт)$

Плотность потока энергии $\vec{j}$ - величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке, перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия.

Направление вектора Умова $\vec{j}$ совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

$$\vec{j} = w\vec{V} ,$$

где $\vec{j}$ - плотность потока энергии (вектор Умова), w - плотность энергии,

$\vec{V}$ - вектор, модуль которого равен фазовой скорости.

Среднее значение вектора плотности потока, энергии

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{V} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \vec{V} ,$$

где ρ - плотность среды, A - амплитуда волны, ω - циклическая частота, V - фазовая скорость волны.

Интенсивность волны в данной точке J - среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной. Для плоской и сферической синусоидальных волн имеем:

$$J = \left| \langle \vec{j} \rangle \right| = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 V$$

Интенсивность волны убывает с расстоянием по закону Бугера:

$$J = J_0 e^{-\kappa x},$$

где κ — коэффициент поглощения упругих волн;

$\dfrac{1}{\kappa}$ - расстояние, на котором интенсивность волн уменьшается в e раз.

$[\kappa] = \dfrac{1}{м}$.

Дисперсия волн - зависимость фазовой скорости гармонической волны от частоты ω (или от длины волны λ).

Дисперсионное соотношение

$$k = k(\omega) = \frac{\omega}{V(\omega)},$$

где k - волновое число, $V(\omega)$ - фазовая скорость.

Среда, в которой наблюдается явление дисперсии, называется диспергирующей средой. Все вещества, в той или иной степени, являются диспергирующими. Вакуум, как показали тщательные исследования, дисперсией не обладает.

Принцип суперпозиции и групповая скорость

Если в среде имеется несколько источников колебаний, и исходящие от них волны проходят друг через друга, не оказывая взаимного влияния, то среда обладает ***линейными свойствами*** (малы амплитуды волн). Волны в этом случае удовлетворяют ***принципу суперпозиции***: результирующее возмущение в какой-либо точке среды при одновременном распространении в ней нескольких волн равно сумме возмущений от каждой из этих волн (в местах встречи волн колебания складываются).

Строго монохроматическая волна - это идеализация. Таких волн в природе нет. Любая реальная волна может быть представлена как суперпозиция монохроматических волн с различными амплитудами и частотами. Любую несинусоидальную волну можно заменить эквивалентной ей системой синусоидальных волн - группой волн, или волновым пакетом. В его пределах монохроматические составляющие усиливают друг друга, вне пакета - практически гасят друг друга. Спектр частот - совокупность значений частот этих синусоидальных волн.

В недиспергирующей среде все синусоидальные волны, образующие волновой пакет, имеют неодинаковое фазовые скорости V. В диспергирующей «среде волновой пакет перемещается со скоростью, называемой групповой. Это скорость перемещения центра пакета (максимальной амплитуды). Групповая скорость волны (пакета) - это скорость переноса энергии этой волной.

Связь между групповой $u = \dfrac{d\omega}{dk}$ и фазовой $V = \dfrac{\omega}{k}$ скоростями:

$$u = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

где λ - длина волны.

В недиспергирующей среде $\frac{dV}{d\lambda} = 0$, и групповая скорость совпадает с фазовой.

Для световой волны в вакууме

$$u = V = c = 3 \cdot 10^8 \ м/с .$$

Интерференция волн

Стоячие волны

Когерентные волны - волны, создающие колебания и обладающие в каждой точке среды постоянной разностью фаз. Источники когерентных волн - когерентные источники.

Интерференция - явление наложения волн, полученных от когерентных источников. В результате интерференции колебания в одних точках усиливаются, а в других ослабляют друг друга.

Стоячая волна - волна, образующаяся в результате наложения двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу и имеющих одинаковые частоты и амплитуды.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Например, если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае возникает узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения возникает пучность (рис. 5.13 *а),* если более плотная - узел (рис. 5.13, *б).* Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит, и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами - образуется пучность.

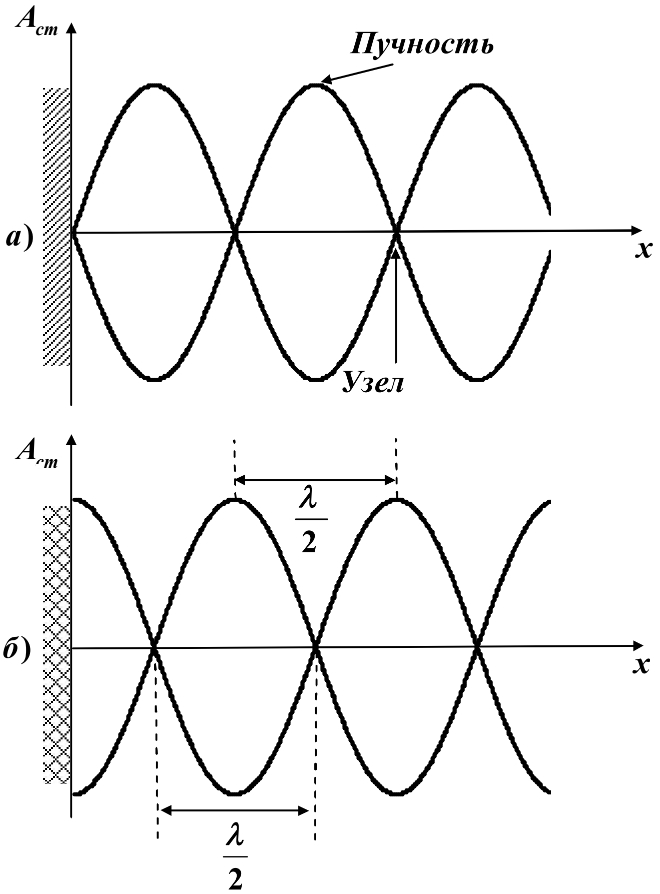


Рис. **5.13**

Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны *переноса энергии нет,* так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Уравнение стоячей волны:

$$\xi = \left(2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)\cdot \cos\omega t,$$

где амплитуда стоячей волны

$$A_{ст} = \left|2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right| = 2A\cos kx.$$

Амплитуда является периодической функцией координаты x.

Точки, в которых $kx = 0, \pi, ... A_{ст} = 0$ - узлы стоячей волны, а точки в которых $kx = \pi/2, 3\pi/2, ... A_{ст} = 2A,$ т.е. амплитуда максимальна — пучности стоячей волны (см. рис. 5.22).

Длина стоячей волны - расстояние между двумя узлами или двумя пучностями:

$$\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$$

где λ - длина бегущей волны.

При переходе через узел фаза колебаний изменяется скачками на π. Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе, все точки, находящиеся между соседними узлами, колеблются синфазно (в одинаковой фазе).

Скорость частиц в стоячей волне описывается уравнением:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\left(2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)\cdot \sin\omega t = -(2A\omega\cos kx)\cdot \sin\omega t.$$

Деформация среды ε:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\left(2A\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)\cdot \cos\omega t = -(2Ak\cos kx)\cdot \cos\omega t.$$

Энергия стоячей волны периодически (с частотой 2ω) перекачивается от узлов, где сосредоточена $W^{п}$, к пучностям, где сосредоточена $W^{к}$, и обратно.

Стоячая волна энергии не переносит.

Колебания струны

В натянутой струне, закрепленной с обоих концов, при возбуждении какого-либо произвольного поперечного возмущения возникнет довольно сложное нестационарное движение. Стационарное же движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах.

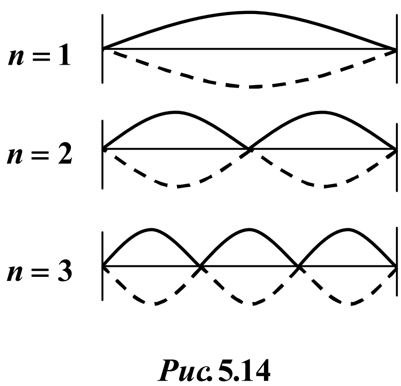


Рис. **5.14**

Это связано с тем, что на закрепленных концах струны должны выполняться определенные граничные условия: в них смещение ξ все время должно равняться нулю. В закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$ натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны. В местах закрепления струны должны располагаться узлы (см. рис. 5.14.). Отсюда следует, что на длине струны l должно укладываться целое число n полуволн:

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad (n = 1,2,...),$$

где l - длина струны, λ - длина волны, n - целые числа.

Собственные частоты струны:

$$\nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{V}{2l}n = \nu_1 n$$

Где V - фазовая скорость волны, определяемая линейной плотностью струны, $\nu = \frac{V}{2l}$ - основная частота.

Колебания с собственными частотами - собственные колебания или гармоники.

Эффект Доплера

Частота волнового процесса различна, если ее оценивать с помощью аппаратов, неподвижных относительно источника или движущихся по отношению к нему.

Если источник волн и наблюдатель неподвижны относительно среды, то наблюдатель регистрирует частоту волн, равную частоте колебаний источника. В случае, когда источник либо наблюдатель движутся, частота волн, регистрируемая наблюдателем, отличается от частоты колебаний источника. Этот эффект впервые описал Доплер (1842 г.).

Эффектом Доплера называют изменение частоты волн, регистрируемой приёмником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и их приёмника.

При сближении источника и приемного прибора воспринимаемая частота становится больше и при их удалении друг от друга меньше.

Эффект Доплера для звуковых волн

Рассмотрим различные случаи применения эффекта Доплера.

Пример 1. Приемник неподвижен, источник неподвижен.

λ_0 - длина волны в среде, ν_0 - частота колебания источника, V - скорость распространения волны в среде (фазовая скорость). $\lambda = \lambda_0 = \frac{V}{\nu_0}$ (Эффект Доплера не наблюдается).

Пример 2. Приёмник неподвижен, источник движется со скоростью V_1.

Частота и длина волны, воспринимаемые приемником:

а) в случае удаления источника:

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1+\dfrac{V_1}{V}}, \qquad \lambda' = \lambda_0\left(1+\frac{V_1}{V}\right).$$

б) в случае приближения источника:

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1-\dfrac{V_1}{V}}, \qquad \lambda'' = \lambda_0\left(1-\frac{V_1}{V}\right)$$

Пример 3. Источник неподвижен, приемник движется со скоростью V_2

Частота и длина волны, воспринимаемые приемником:

а) в случае удаления приёмника:

$$\nu' = \nu_0\left(1-\frac{V_2}{V}\right), \qquad \lambda = \lambda_0.$$

б) в случае приближения приёмника:

$$\nu'' = \nu_0\left(1+\frac{V_2}{V}\right), \quad \lambda = \lambda_0 .$$

Пример 4. Приёмник движется относительно среды со скоростью u_1, источник - со скоростью u_2:

$$\nu = \nu_0\left(\frac{1+\dfrac{u_1}{V}}{1-\dfrac{u_2}{V}}\right) = \nu_0\left(\frac{V+u_1}{V-u_2}\right)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение упругих волн. Что называют источником волны?
2. Дайте определения однородной изотропной и анизотропной сред.
3. Какие волны называют бегущими?
4. В каком случае волна называется гармонической?
5. Дайте определения фронта волны и волновой поверхности.
6. Как направлен волновой вектор?
7. Что описывает волновое уравнение?
8. Скорость распространения каких волн называют фазовой? От чего зависит фазовая скорость?
9. Из чего состоит энергия волны в упругой среде?
10. Что называют потоком энергии? Плотностью потока энергии? Интенсивностью волны?
11. Что называют дисперсией волн, и какая среда называется диспергирующей?
12. В чем заключается принцип суперпозиции?
13. Обоснуйте введение понятия волнового пакета.
14. Какие волны называют когерентными?
15. Приведите определение интерференции.
16. Как образуется стоячая волна?
17. Чем обусловлено образование узла или пучности?
18. Чем характеризуются колебания струны?

19. Что называют эффектом Доплера?
20. Как воспринимаемая частота изменяется от движения источника и приемного прибора?

Примеры решения задач

Пример 12. *Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью* $V = 15\frac{м}{с}$. *Период* T *колебаний точек шнура равен* $1{,}2с$, *амплитуда* $A = 2см$. *Определить: 1) длину волны* λ; *2) фазу* φ *колебаний, смещение* ξ □, *скорость* $\dot{\xi}$, *и ускорение* $\ddot{\xi}$ □, *точки, отстоящей на расстоянии* $x = 45м$ *от источника волн в момент* $t = 4с$; *3) разность фаз* $\Delta\varphi$ *колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях* $x_1 = 20м$ *и* $x_2 = 30м$.

Решение. *1. Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и может быть найдена из соотношения* $\lambda = V \cdot T$.

Подставив значения величин V *и* T, *получим* $\lambda = 18м$.

2. Запишем уравнение волны:

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) \qquad (1)$$

где ξ *- смещение колеблющейся точки;* x *- расстояние точки от источника волн;* V *- скорость распространения волн.*

Фаза колебаний точки с координатой x *в момент времени* t *определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:*

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{V}\right), \text{ или } \varphi = \frac{2\pi}{T\left(t - \frac{x}{V}\right)}$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Произведя вычисления по последней формуле, получим $\varphi = 5.24\,рад$, *или* $\varphi = 300^\circ$

Смещение точки ξ *определим, подставив в уравнение (1) значения амплитуды* A *и фазы* φ: $\xi = 1см$.

Скорость $\dot{\xi}$ *точки находим, взяв первую производную от смещения по времени:*

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega\sin\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) = -\frac{2\pi A}{T}\sin\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) = \frac{2\pi A}{T}\sin\varphi$$

Подставив значения величин π, A, T *и* φ □ *и произведя вычисления, получим* $\dot{\xi} = 9\frac{см}{с}$.

Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому

$$\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{dt} = -A\omega^2\cos\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) = -\frac{4\pi^2 A}{T}\cos\varphi$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем $\ddot{\xi} = 27{,}4\frac{см}{с^2}$

3. Разность фаз $\Delta\varphi$ *колебаний двух точек волны связана с расстоянием* Δx *между этими точками соотношением*

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right)$$

Подставив значения величин λ, x_1 *и* x_2 *и вычислив, получим*

$\Delta\varphi = 3{,}49\,рад$, *или* $\Delta\varphi = 200^\circ$.

Ответ: $\Delta\varphi = 3{,}49\,рад$

Пример 13. *Показать, что выражение* $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ *удовлетворяет волновому уравнению* $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ *при условии, что* $\omega = k\vartheta$.

Решение. *Продифференцируем левую часть равенства:* $\frac{\partial\xi}{\partial x} = A\cdot k\cdot\sin(\omega t - kx)$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial^2 x} = -A\cdot k^2\cdot\cos(\omega t - kx) \qquad (1)$$

Продифференцируем правую часть равенства:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -A\cdot\omega\cdot\sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial^2 t} = -A\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t - kx) \qquad (2)$$

При условии, что $\omega = k\vartheta$ *наблюдается равенство правых частей уравнений (1) и (2)*

Следовательно, равенство $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ *выполняется.*

Ответ: $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$

Пример 14*. *Волна смещений частиц среды имеет вид* $\xi = a\sin(\alpha t - \beta x)$, *где* a, α, β *- положительные постоянные. Найти отношение амплитуды скорости частиц среды к скорости волны.*

Решение. *Скорость, частиц* $\partial\xi/\partial t = a\alpha\cos(\alpha t - \beta x)$, *где* $a\alpha$ *- амплитуда скорости* (V_m). *Скорость волны находим из условия* $\alpha t - \beta x = const$. *Продифференцировав это выражение по* t, *получим:* $\dot{x} = \alpha/\beta$. *Искомое отношение* $V_m/\dot{x} = \alpha\beta$.

Ответ: $V_m/\dot{x} = \alpha\beta$

Пример 15*. *Найти волновой вектор* $\vec{k}$ *плоской волны с частотой* ω, *если ее фазовые скорости в положительных направлениях осей* X, Y, Z *равны* V_1, V_2, V_3.

Решение. *Волновой вектор* $\vec{k} = k\vec{n}$, *где* $\vec{n}$ *- орт нормали к волновой поверхности* $\vec{n} = \vec{e}_x\cos\alpha + \vec{e}_y\cos\beta + \vec{e}_z\cos\gamma$

---

*Задача повышенной сложности

*Задача повышенной сложности

где α, β, γ *- углы между вектором* $\vec{n}$ *и ортами осей координат. Останется учесть, что* $k = \omega / V$, V *- фазовая скорость вдоль вектора* $\vec{k}$, $\cos\alpha = V/V_1, \cos\beta = V/V_2, \cos\gamma = V/V_3$. *В результате получим:*

$$\vec{k} = \omega\left(\vec{e}_x / V_1 + \vec{e}_y / V_2 + \vec{e}_z / V_3\right)$$

Ответ: $\vec{k} = \omega\left(\vec{e}_x / V_1 + \vec{e}_y / V_2 + \vec{e}_z / V_3\right)$

Пример 16. *Поезд проходит мимо станции со скоростью* $u = 40 \, м/с$. *Частота* ν_0 *тона гудка электровоза равна* $300\,Гц$. *Определить кажущуюся частоту* ν *тона для человека, стоящего на платформе, в двух случаях: 1) поезд приближается; 2) поезд удаляется.*

Решение.

Согласно принципу Доплера, частота ν звука, воспринимаемая человеком, зависит от скорости $u_{ист}$ *поезда и скорости* $u_{пр}$ *человека. Эта зависимость выражается формулой*

$$\nu = \frac{V + u_{\text{пр}}}{V - u_{\text{ист}}} \nu_0 ,$$

где $V = 332 \, м/с$ *- скорость звука в воздухе;* ν_0 *- частота звуковых волн, излучаемых источником.*

1) поезд приближается

$$\nu = \frac{V}{V - u_{\text{ист}}} \nu_0 \qquad \nu_1 = 341\,Гц$$

2) поезд удаляется

$$\nu = \frac{V}{V + u_{\text{ист}}} \nu_0 \qquad \nu_2 = 268\,Гц$$

Ответ: $\nu_1 = 341\,Гц$, $\nu_2 = 268\,Гц$

Пример 17*. *Найти зависимость между групповой* u *и фазовой* V *скоростями для следующих законов дисперсии:*

а) $V \infty k$; *б)* $V \infty \frac{1}{\omega^2}$.

Здесь k *и* ω *- волновое число и циклическая частота.*

Решение. *а) По определению,* $u = \frac{d\omega}{dk}$, *где* $\omega = V \cdot k$. *Тогда*

$$u = \frac{d}{dk}(Vk) = V + k\frac{dV}{dk} \qquad (1)$$

Пусть $V = ak$, *где* a *- некоторая постоянная. В этом случае (1) примет вид*

$$u = V + ak = 2V$$

б) Пусть $V = \frac{\alpha}{\omega^2}$, α *- некоторая постоянная. Тогда*

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{V}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^3}{\alpha}\right) = \frac{3}{V}$$

---

*Задача повышенной сложности

Поэтому групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{V}{3}.$$

Ответ: а) $u = 2V$ *б)* $u = \frac{V}{3}$.

Варианты заданий для практических занятий

Вариант №1

⊕⊕ ***Задача №1.*** Точка совершает колебания по закону $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где *A*=4 см. Определить начальную фазу φ_0, если: 1) $x(0) = 2см$ и $\dot{x}(0) < 0$; 2) $x(0) = 2\sqrt{2}см$ и $\dot{x}(0) > 0$; 3) $x(0) = -2\sqrt{3}см$ и $\dot{x}(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента *t*=0.

⊕⊕ ***Задача №2.*** Колебания точки происходят по закону $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 3см, ее скорость $\dot{x} = 10\frac{см}{с}$ и ускорение $\ddot{x} = -40\frac{см}{с^2}$. Найти амплитуду A, угловую частоту ω, период T колебаний и фазу $(\omega t + \varphi_0)$ в рассматриваемый момент времени.

⊕⊕ ***Задача №3.*** Складываются два гармонических колебания одинаковой частоты и одинакового направления: $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. Начертить векторную диаграмму для момента времени $t = 0$. Определить аналитически амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Отложить A и φ на векторной диаграмме. Найти уравнение результирующего колебания (в тригонометрической форме через косинус) если $A_1 = 1см$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$; $A_2 = 1см$, $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$.

⊕⊕ ***Задача №4.*** Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям описываемых уравнениями: $x = A\cos\omega t$ и $y = B\sin 2\omega t$. Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения, если $A = 3см$ и $B = 2см$.

⊕⊕ ***Задача №5.*** Найти возвращающую силу F в момент $t = 1с$ и полную энергию E материальной точки, совершающей колебания по закону $x = A\cos\omega t$, где $A = 2см$; $\omega = \frac{2\pi}{3}с^{-1}$. Масса m материальной точки равна 10 г.

⊕⊕ ***Задача №6.*** Математический маятник длиной $\ell_1 = 40см$ и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $\ell_2 = 60см$ синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние a центра масс стержня от оси колебаний.
⊕⊕ ***Задача №7.*** Однородный диск радиусом $R = 30см$ колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период T его колебаний?
⊕⊕ ***Задача №8.*** Ареометр массой $m = 50г$, имеющий трубку диаметром $d = 1см$, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период T этих колебаний.
⊕⊕ ***Задача №9.*** Логарифмический декремент колебаний Θ маятника равен 0,003. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.
⊕⊕ ***Задача №10.*** Задано уравнение плоской волны $\xi(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$, где $A = 1см$, $\omega = 628c^{-1}$, $k = 1м^{-1}$. Определить: 1) частоту колебаний ν и длину волны λ 2) фазовую скорость V; 3) максимальные значения скорости $\dot{\xi}_{max}$ и ускорения $\ddot{\xi}_{max}$ колебаний частиц среды.
⊕⊕ ***Задача №11.*** Мимо железнодорожной платформы проходит электропоезд. Наблюдатель, стоящий на платформе, слышит звук сирены поезда. Когда поезд приближается, кажущаяся частота звука $\nu_1 = 1100Гц$; когда удаляется, кажущаяся частота $\nu_2 = 900Гц$. Найти скорость u электровоза и частоту ν_0 звука, издаваемого сиреной.
⊕⊕⊕ ***Задача №12.*** Брусок массы m находится на гладкой горизонтальной поверхности. К нему прикреплена легкая пружина жесткости k. Свободный конец пружины начали перемещать в горизонтальном направлении вдоль пружины с некоторой постоянной скоростью. Через сколько времени надо остановить этот конец пружины, чтобы после остановки брусок не колебался?
⊕⊕⊕ ***Задача №13.*** Два кубика, массы которых равны m_1 и m_2 соединили невесомой пружинкой жесткости k и положили на гладкую горизонтальную плоскость. Затем кубики немного сблизили и одновременно отпустили. Найти собственную частоту колебаний системы.
⊕⊕⊕ ***Задача №14.*** Тонкий однородный диск массы m и радиуса R, подвешенный в горизонтальном положении к упругой нити, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент упругих сил со стороны нити $N = \alpha \cdot \varphi$, где α - постоянная, φ - угол поворота из положения равновесия.

Сила сопротивления, действующая на единицу поверхности диска, $F_1 = \eta \cdot V$, где η - постоянная, V - скорость данного элемента диска относительно жидкости. Найти частоту малых колебаний.
⊕⊕⊕ ***Задача №15.*** На одной и той же нормали к стенке находятся источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 1700 Гц$ и приемник. Источник и приемник неподвижны, а стенка удаляется от источника со скоростью $U = 6{,}0 \, см/с$. Найти частоту биений, которую будет регистрировать приемник. Скорость звука $V = 340 \, м/с$.
Вариант №2
⊕⊕ ***Задача №1.*** Точка совершает колебания по закону $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4см$. Определить начальную фазу φ_0, если: 1) $x(0) = 2см$ и $\dot{x}(0) < 0$; 2) $x(0) = -2\sqrt{2}см$ и $\dot{x}(0) < 0$; 3) $x(0) = 2см$ и $\dot{x}(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента *t*=0..
⊕⊕ ***Задача №2.*** Колебания точки происходят по закону $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 4см, ее скорость $\dot{x} = 15\frac{см}{с}$ и ускорение $\ddot{x} = -60\frac{см}{с^2}$. Найти амплитуду A, угловую частоту ω, период T колебаний и фазу $(\omega t + \varphi_0)$ в рассматриваемый момент времени.
⊕⊕ ***Задача №3.*** Складываются два гармонических колебания одинаковой частоты и одинакового направления: $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. Начертить векторную диаграмму для момента времени $t = 0$. Определить аналитически амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Отложить A и φ на векторной диаграмме. Найти уравнение результирующего колебания (в тригонометрической форме через косинус) если $A_1 = 1см$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$; $A_2 = 2см$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$.
⊕⊕ ***Задача №4.*** Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям описываемых уравнениями: $x = A\sin\omega t$ и $y = B\cos 2\omega t$. Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения, если $A = 2см$ и $B = 3см$.
⊕⊕ ***Задача №5.*** Колебания материальной точки массой $m = 0{,}1кг$ происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 5см$; $\omega = 20с^{-1}$. Определить максимальные значения возвращающей силы $F_{\max}$ и кинетической энергии $T_{\max}$.
⊕⊕ ***Задача №6.*** Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $\ell = 120см$ колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпен-

дикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние a от центра масс стержня. При каком значении a период T колебаний имеет наименьшее значение?
⊕⊕ ***Задача №7.*** Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус R обруча равен 30 см. Вычислить период T колебаний обруча.
⊕⊕ ***Задача №8.*** Набухшее бревно, сечение которого постоянно по всей длине, погрузилось вертикально в воду так, что над водой находится лишь малая (по сравнению с длиной) его часть. Период T колебаний бревна равен 5 с. Определить длину ℓ бревна.
⊕⊕ ***Задача №9.*** Амплитуда колебаний маятника длиной $\ell = 1 м$ за время $t = 10 мин$ уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент колебаний Θ.
⊕⊕ ***Задача №10.*** Задано уравнение плоской волны $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$, где $A = 0{,}5 см$, $\omega = 628 с^{-1}$, $k = 2 м^{-1}$. Определить: 1) частоту колебаний ν и длину волны λ 2) фазовую скорость V; 3) максимальные значения скорости $\dot{\xi}_{\max}$ и ускорения $\ddot{\xi}_{\max}$ колебаний частиц среды.
⊕⊕ ***Задача №11.*** Мимо неподвижного электровоза, гудок которого дает сигнал частотой $\nu_0 = 300 Гц$, проезжает поезд со скоростью $u = 40 \frac{м}{с}$. Какова кажущаяся частота ν тона для пассажира, когда поезд приближается к электровозу? когда удаляется от него?
⊕⊕⊕ ***Задача №12.*** Частица массы m движется в плоскости xy под действием силы, зависящей от скорости по закону $\vec{F} = a \cdot (y\vec{i} - x\vec{j})$, где a - положительная постоянная, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ -орты осей x и y. В начальный момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = y = 0$ и имела скорость V_0 в направлении орта $\vec{j}$. Найти закон движения частицы $x(t)$, $y(t)$, а также уравнение ее траектории.
⊕⊕⊕ ***Задача №13.*** Однородный стержень длины ℓ совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси OO', перпендикулярной к стержню и проходящей через одну из его точек. Найти расстояние между центром стержня и осью OO', при котором период колебаний будет наименьшим. Чему он равен?
⊕⊕⊕ ***Задача №14.*** К невесомой пружине подвесили грузик, и она растянулась на $\Delta x = 9{,}8 см$. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\lambda = 3{,}1$.

⊕⊕⊕ ***Задача №15.*** Источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 1700\,Гц$ и приемник находятся в одной точке. В момент $t = 0$ источник начинает удаляться от приемника с постоянным ускорением $a = 10{,}0\,{}^{м}\!/_{с^2}$. Считая скорость звука $V = 340\,{}^{м}\!/_{с}$, найти частоту колебаний, воспринимаемых неподвижным приемником через t=10,0 с. после начала движения источника.