ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ П.1. Понятие вектора. Сложение векторов

В механике различают величины скалярные и векторные. К скалярным величинам относятся: масса, энергия, механическая работа, температура и т.д.. К векторным величинам относятся: перемещение, скорость, ускорение, сила и т.д.. Величина, характеризующаяся только числовым значением, называется *скалярной*. *Векторная величина* опредеяется числовым значением и направлением. Геометрически вектор обозначается направленным отрезком (рис. П.1). Обозначают вектор как $\vec{a}$, а его длину — $|\vec{a}|$. Заметим, что длина

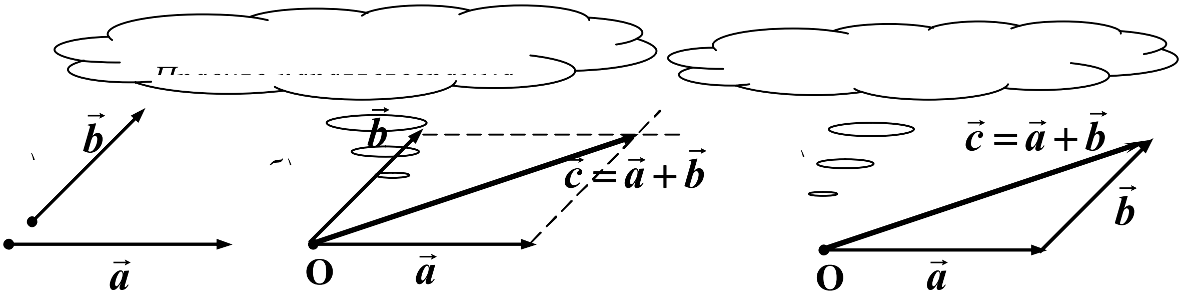

Рис. П.1

вектора всегда положительная величина.

При сложении двух векторов применяют два правила: правило параллелограмма и правило треугольника. Рассмотрим процедуру сложения двух векторов по правилу параллелограмма.

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, как показано на рис. 1,а. Найдем сумму этих векторов по правилу параллелограмма. Перенесем параллельно эти векторы в точку О так, чтобы начала этих векторов находились в точке О. Построим на этих векторах параллелограмм. Суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является диагональ этого параллелограмма, выходящая из точки О (см. рис.П.1,б).

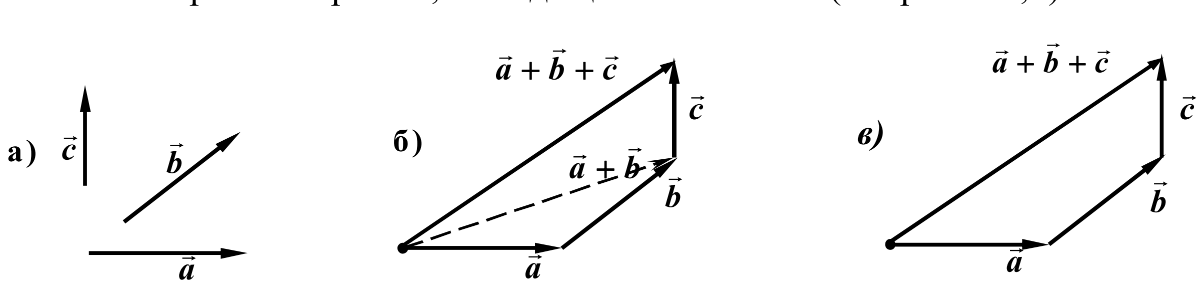

Рис.П.2

Для сложения заданных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника проведем следующие действия: параллельно перенесем вектор $\vec{a}$ в точку О, затем в конец вектора $\vec{a}$ перенесем параллельно вектор $\vec{b}$ так, чтобы начало вектора $\vec{b}$ совпало с концом вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{c}$, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

При наличии большего числа векторов их сумму находят по правилу многоугольника. Заметим, что правило многоугольника вытекает из поэтапного применения правила треугольника (см. рис. П.2,б). Сначала находят сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — вектор $\vec{a}+\vec{b}$, затем к полученному вектору $\vec{a}+\vec{b}$ прибавляют $\vec{c}$, получают вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Из построения вытекает такое правило. *Если все векторы расположить так, что к концу первого вектора приставлено начало второго, к концу второго — начало третьего и т.д., то искомый результирующий вектор представляет собой направленный отрезок, проведенный из начала первого в конец последнего вектора (см. рис. П.2.в).*

§ П.2. Вычитание векторов

Правило вычитания двух векторов можно получить путем сложения вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, являющимся обратным вектору $\vec{b}$. Проведя вышеуказанные действия над векторами $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, приходим к следующему.

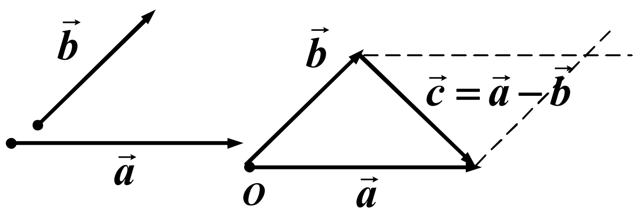

Рис. П.3

Чтобы вычесть вектор $\vec{b}$ из вектора $\vec{a}$, нужно эти векторы параллельно перенести в одну точку так, чтобы начала этих векторов совпадали, тогда вектор разности $\vec{a}-\vec{b}$ представляет собой направленный отрезок, проведенный из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$ (см. рис. П.3).

§ П.3. Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается некоторый вектор $\vec{c}$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если число k положительное; если число k отрицательное, то направление вектора $\vec{c}$ противоположно направлению исходного вектора $\vec{a}$, причем длина вектора $\vec{c}$ отличается от длины вектора $\vec{a}$ в k раз.

Если число k больше единицы, то длина вектора $\vec{c}$ больше длины исходного вектора $\vec{a}$, если число k меньше единицы, то длина вектора $\vec{c}$ меньше длины исходного вектора $\vec{a}$.

Важно помнить, что, умножая вектор на число, мы получаем вектор параллельный исходному вектору.

§ П.4. Составляющие вектора. Проекции вектора на оси координат

Любой вектор $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат можно представить в виде суммы трех векторов $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ (рис. 4). Операция замены вектора несколькими называется *разложением этого вектора на составляющие*. В этом случае векторы $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ *называются составляющими вектора* $\vec{\mathbf{a}}$ вдоль оси OX, OY и OZ соответственно. При этом справедливо следующее векторное равенство:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z. \qquad (\text{П. } 1)$$

Однако на практике довольно часто пользуются понятием проекций вектора на заданные направления. В этом случае вводят единичные векторы $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ вдоль осей OX, OY и OZ соответственно (рис. П.4). *Единичным вектором (ортом)* называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор нужен для того, чтобы указать определенное направление в пространстве. Из рис. П. 4 видно, что составляющие $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{x}$, $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$, $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{z}$ можно выразить через введенные единичные векторы следующим образом:

$$\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{i}; \quad \vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j}; \quad \vec{a}_z = a_z \cdot \vec{k}, \qquad (\text{П.}2)$$

где a_x, a_y, a_z – есть некоторые числа, которые называются проекциями вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на направления, указанные единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, или проекциями на оси координат OX, OY и OZ соответственно.

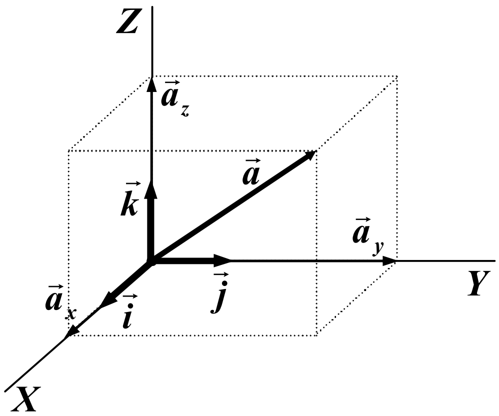

Рис. П.4

Таким образом, учитывая равенства (П.1) и (П.2), имеем:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}. \qquad (\text{П.}3)$$

Если известна длина вектора $|\vec{a}|$, то проекции определяются как произведение его длины на косинус угла между вектором и положительным направлением оси OX, OY и OZ соответственно:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right), \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{j}}\right), \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right). \qquad (\text{П.}4)$$

Проекции вектора равны разности координат начальной (x_0, y_0, z_0) и конечной точки $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, т.е.:

$$a_x = x - x_0, \quad a_y = y - y_0, \quad a_z = z - z_0. \qquad (\text{П.}5)$$

Длина вектора $|\vec{\mathbf{a}}|$ связана с его проекциями следующим соотношением:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}\,. \tag{П.6}$$

§ П.5. Основное свойство векторных равенств

Пусть заданы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ следующим образом:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \quad \vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}\,. \tag{П.7}$$

Пусть вектор $\vec{d}$ связан с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соотношением:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\,. \tag{П.8}$$

Из равенств (П.7) вместо векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ подставим в равенство (П.8), получим следующее соотношение для вектора $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \left(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\right) + \left(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}\right) - \left(c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}\right). \tag{П.9}$$

В равенстве (П.9) сгруппируем слагаемые по соответствующим единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, получим выражение:

$$\vec{d} = (a_x + b_x - c_x)\cdot \vec{i} + \left(a_y + b_y - c_y\right)\cdot \vec{j} + (a_z + b_z - c_z)\cdot \vec{k}\,. \tag{П.10}$$

Выразим вектор $\vec{d}$ через его проекции на оси координат

$$\vec{d} = d_x \cdot \vec{i} + d_y \cdot \vec{j} + d_z \cdot \vec{k}\,. \tag{П.11}$$

Сравнивая выражения, стоящие при единичных векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ в равенствах (П.10) и (П.11), получим следующие три соотношения для проекций векторов $\vec{d}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$d_x = a_x + b_x - c_x, \quad d_y = a_y + b_y - c_y, \quad d_z = a_z + b_z - c_z\,. \tag{П.12}$$

Сравнивая соотношение (8) для векторов $\vec{d}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с соотношениями (П.12) для проекций этих векторов на оси координат, делаем утверждение: *если некоторое равенство справедливо для векторов, то такие же равенства справедливы и для проекций этих векторов на соответствующие оси координат.*

Данное утверждение широко используется при решении тех физических задач, в которых необходимо применять векторные равенства.

§ П.6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Если обозначить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через α, для скалярного произведения будем иметь:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\cdot\cos\alpha. \qquad (П.13)$$

Из формулы (П.13) следует, что скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это произведение модуля одного из них на проекцию второго на направление первого вектора (см. рис. П.5):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b_a=a_b\cdot b. \qquad (П.14)$$

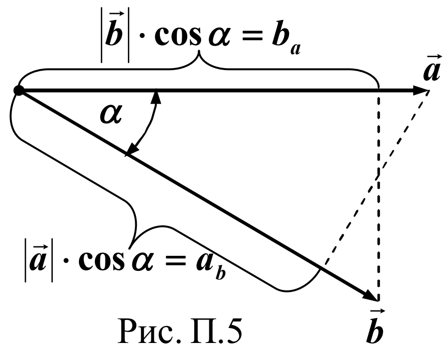

Рис. П.5

Важно помнить, что скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю, так как в этом случае $\cos\alpha=\cos 90^0=0$.

Пусть векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат в виде $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$, тогда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется из следующего соотношения:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}. \qquad (П.15)$$

Приравняв правые части равенств (П.13) и (П.15), получим формулу для вычисления косинуса угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}. \qquad (П.16)$$

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ справедливы равенства:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон);
2. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон);
3. $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон).

§ П.7. Векторное произведение векторов

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в прямоугольной декартовой системе координат $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$, векторным произведением данных векторов является вектор $\vec{c}$, длина которого вычисляется по формуле

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \cdot \sin\alpha, \qquad (П.17)$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение обозначается как $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обладает следующими свойствами:

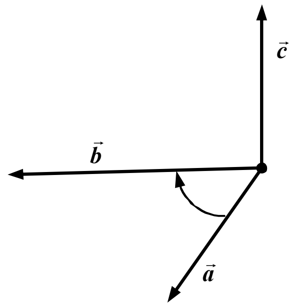

Рис. П.6

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Направление вектора $\vec{c}$ определяется по правилу «буравчика». Буравчик вращаем от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, тогда поступательное движение буравчика укажет направление вектора $\vec{c}$.

Во многих задачах инженерии и физики нужно иметь возможность строить вектор, перпендикулярный двум имеющимся — векторное произведение предоставляет эту возможность.

Векторное произведение полезно для «измерения» перпендикулярности векторов — длина векторного произведения двух векторов равна произведению их длин, если они перпендикулярны, и уменьшается до нуля, если векторы параллельны.

Для вычисления векторного произведения векторов можно использовать определитель матрицы

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \qquad (П.18)$$

$$= \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\right) \cdot \vec{i} + \left(a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\right) \cdot \vec{j} + \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right) \cdot \vec{k}.$$

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ справедливы равенства:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a}$ (свойство анти коммутативности);
2. $\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right)$ (свойство ассоциативности относительно умножения на скаляр).
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (свойство дистрибутивности);
4. $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (формула «БАЦ минус ЦАБ»)